

Càlcul del corrent crític en materials superconductors

Treball de Final de Grau



Abel Purτί del Ruste

Tutor: Jaume Amorós

Quadrimestre de primavera

Curs 2015/2016

Resum

El Treball de Final de Grau aquí desenvolupat tracta de l'aplicació d'un camp magnètic en una peça superconductora per a induir-li un corrent elèctric.

La llei de Biot-Savart permet resoldre la relació entre el camp magnètic i el corrent elèctric en una peça a través de la igualtat:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}$$

D'aquesta equació en sorgeixen una llarga llista de possibles estudis. Aquest treball es fonamenta en aprofundir en l'aplicació d'aquesta llei, però a la inversa. És a dir, que a partir d'un camp magnètic vertical en una mostra se'n pugui determinar de manera fidel a la realitat el camp elèctric que hi circula. És el que s'anomena problema de Biot-Savart invers i en general no té solució, però quan el corrent és pla com el cas que ens ocupa, sí que permet llavors calcular un mapa del corrent en el pla, resultat del promig al llarg de z dels corrents en els plans per z constant.

Així doncs en el present treball, a través del previ estudi teòric de la llei de Biot-Savart i el desenvolupament de la seva fórmula inversa, s'introdueixen millores en un programa de MATLAB per al càlcul ràpid, eficaç i fiable del corrent elèctric que indueix un camp magnètic vertical; i es comproven tals canvis amb l'anàlisi de mostres mesurades pel CSIC.

Sumari

| | |
|--|-----------|
| RESUM | 1 |
| SUMARI | 3 |
| 1. OBJECTIUS DEL PROJECTE | 5 |
| 2. LLEI DE BIOT-SAVART | 6 |
| 2.1. Introducció | 6 |
| 2.2. El camp magnètic i la imantació | 7 |
| 2.3. El problema invers de la llei de Biot-Savart | 8 |
| 2.4. Càlcul de J a partir dels valors d'imantació | 9 |
| 3. APLICACIÓ ALS MATERIALS SUPERCONDUCTORS | 11 |
| 3.1. El material superconductor YBaCuO | 11 |
| 3.2. Dominis d'anàlisi | 12 |
| 3.3. La sonda Hall | 13 |
| 3.4. Exemples d'estudi | 14 |
| 4. EL PROGRAMA DE CàLCUL | 17 |
| 4.1. Desenvolupament del programa | 17 |
| 4.2. Aparició dels corrents ficticis en el càlcul de M | 25 |
| 4.3. Nombre de condició de la matriu G | 26 |
| 4.4. Comprovació del residu | 27 |
| 5. APLICACIÓ EN MOSTRES REALS | 29 |
| 5.1. Mostra 1 – Stack L30 | 29 |
| 5.2. Mostra 2 – Stack 2 pols | 36 |
| 5.3. Mostra 3 – Stack nou | 44 |
| 6. PLA DE TREBALL DEL PROJECTE | 52 |
| 6.1. Fases del projecte | 52 |
| 6.2. Durada del projecte | 54 |
| 6.3. Diagrama de Gantt | 55 |

| | |
|---|-----------|
| 7. PRESSUPOST | 56 |
| 7.1. Cost del personal | 56 |
| 7.2. Cost d'equipament informàtic | 56 |
| 7.3. Costs indirectes | 57 |
| 7.4. Pressupost total | 57 |
| 8. IMPACTE MEDIAMBIENTAL | 58 |
| 9. CONCLUSIONS | 59 |
| 10. BIBLIOGRAFIA | 60 |
| 10.1. Referències de divulgació sobre superconductors | 60 |
| 10.2. Referències bibliogràfiques de la memòria | 60 |
| 11. ANNEX | 61 |

1. Objectius del projecte

Els objectius del projecte giren entorn a quatre eixos.

El primer eix és el desenvolupament de la teoria d'inducció magnètica: la imantació, el problema de Biot-Savart invers i el càlcul de corrent elèctric.

El segon, entendre i detallar com s'aplica aquesta teoria: a quins materials, les superfícies analitzades i el mètode de mesura.

En tercer lloc, la millora del programa de càlcul en: temps de resolució, fiabilitat del càlcul, memòria necessària i figures explicatives.

Per últim, comprovar el programa de càlcul amb mostres reals en que a través de càlculs i figures il·lustratives se'n pugui determinar la seva bondat.

2. Llei de Biot-Savart

2.1. Introducció

La llei de Biot-Savart permet trobar el camp magnètic present en una caixa a través del corrent elèctric que hi passa, de tal forma que [1]:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times r}{r^3}$$

On:

- I és la intensitat del corrent.
- dl és el vector diferencial del corrent.
- $r = (x_b - x, y_b - y, z_b - z)$, és a dir, el vector que va dels diferencials de corrent al punt de mesura del camp magnètic.

Per un corrent pla i constant $J = (J_x, J_y, 0)$ que circula per una caixa:

$$C = [x_0, x_f] * [y_0, y_f] * [z_0, z_f]$$

Tenim:

$$Idl = (J_x, J_y, 0) dvol$$

$$Idl \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ J_x & J_y & 0 \\ x_b - x & y_b - y & z_b - z \end{vmatrix} = (J_y(z_b - z), -J_x(z_b - z), J_x(y_b - y) - J_y(x_b - x))$$

Per cada una de les direccions del camp magnètic, la fórmula queda com:

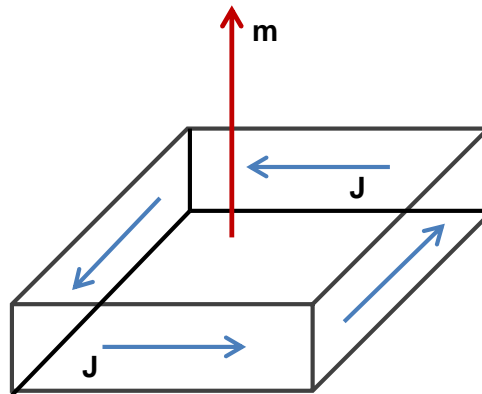
$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J_y(z_b - z)}{((x_b - x)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dvol \\ B_y &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{-J_x(z_b - z)}{((x_b - x)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dvol \\ B_z &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{J_x(y_b - y) - J_y(x_b - x)}{((x_b - x)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dvol \end{aligned}$$

Aquestes tres igualtats correlacionen directament el vector camp magnètic induït, amb el corrent elèctric que passa per una mostra.

2.2. El camp magnètic i la imantació

En primer lloc, cal comentar què és la imantació M [1]. Es tracta d'un vector corresponent a la densitat del moment dipolar magnètic (m) per unitat de volum del material imantat. Jugarà un paper important de cara al càlcul del problema de Biot-Savart invers.

Davant d'una caixa d'un volum determinat i imantació vertical M , el moment dipolar m serà un vector vertical, i el camp magnètic generat és el seu corrent crític que recorre la vora de la caixa.



Partint de la definició anterior, el camp magnètic resultant és:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} M \left[\iint_{[x_0, x_f] \times [z_0, z_f]} \left[-\frac{y_b - y_f}{((x_b - x)^2 + (y_b - y_f)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_b - y_0}{((x_b - x)^2 + (y_b - y_0)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dx dz \right. \\ \left. + \iint_{[y_0, y_f] \times [z_0, z_f]} \left[-\frac{x_b - x_f}{((x_b - x_f)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x_b - x_0}{((x_b - x_0)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dy dz \right]$$

O de manera més abreujada:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} M \iiint_{[x_0, x_f] \times [y_0, y_f] \times [z_0, z_f]} \frac{3(z_b - z)^2 - r^2}{r^5} dx dy dz$$

$$\text{En que } r = \sqrt{(x_b - x)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2}$$

2.3. El problema invers de la llei de Biot-Savart

L'objecte del treball és resoldre el cas invers, és a dir, calcular el corrent elèctric J que circula en un objecte a partir del camp magnètic B .

Com a tal, el problema de Biot-Savart invers no consta d'una solució general, però sí que es poden aconseguir de particulars a partir de tres condicions necessàries:

- El corrent és pla, no té component vertical.
- El corrent no depèn de l'alçada en l'eix vertical.
- Subdividir la mostra en caixes de tal manera que la imantació M és constant per cada caixa $(M_{(i,j)})$. Això implica $C_{(i,j)} = [xc_i, xc_{i+1}] * [yc_j, yc_{j+1}] * [z_0, z_f]$

El corrent elèctric, doncs, es correspon a la forma $J = (J_x, J_y, 0)$, on J_x i J_y són funcions de x i y . D'aquesta manera, es pot procedir al càlcul invers, a partir de la fórmula trobada anteriorment [1]:

$$B_z(i,j) = M_{(i,j)} \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{C_{(i,j)}} \frac{3(z_b - z)^2 - r^2}{r^5} dx dy dz}_{G_{(i,j)}}$$

D'on en surt:

$$\sum_{\text{caixes } C_{(i,j)}} G_{(i,j)} M_{(i,j)} = B_z(x_b, y_b, z_b)$$

Per tant, coneixent:

- $B_z(x_b, y_b, z_b)$, que són les mesures que es prenen al conjunt de punts (x_b, y_b, z_b) de la malla de mesura.
- Els coeficients $G_{(i,j)}$, a partir de les integrals que els defineixen.

Podem calcular els valors $M_{(i,j)}$, constants per cada caixa de la mostra, verticals respecte el pla de la peça i atribuïts al punt mig de cada element. Aquesta consideració equival a que un corrent de densitat M circuli per la vora de l'element, de tal manera que quan la mida d'aquests tendeix a zero (i per tant el nombre de caixes s'apropi a l'infinit), es troba que:

$$\vec{J} = \text{rot } M$$

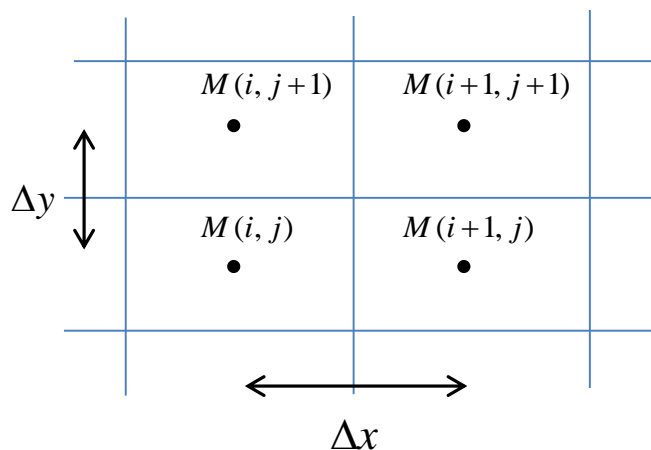
2.4. Càlcul de J a partir dels valors d'imantació

Tal com s'ha vist anteriorment, la relació entre el camp de corrent J i la imantació d'una caixa és:

$$\vec{J} = \text{rot } M = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & M \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial M}{\partial y}, -\frac{\partial M}{\partial x}, 0 \right)$$

Per al càlcul de $\frac{\partial M}{\partial x}$ i $\frac{\partial M}{\partial y}$, cal emprar el Teorema del Valor Mitjà i el Mètode de Diferències

i Entrades, tenint en compte que per quatre elements de corrent rectangulars, existeixen els seus respectius vectors verticals d'imantació:



- Teorema del Valor Mitjà:

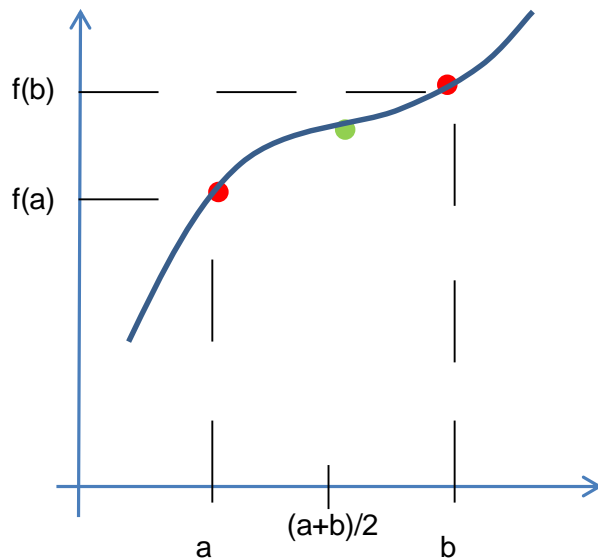
Si $f(x)$ és una funció continua i definida positiva a l'interval $[a,b]$ existeix un punt c desconegut entre a i b tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{on } c \in [a, b]$$

- Mètode de Diferències Centrades:

Si no sabem quin és el punt c del TVM:

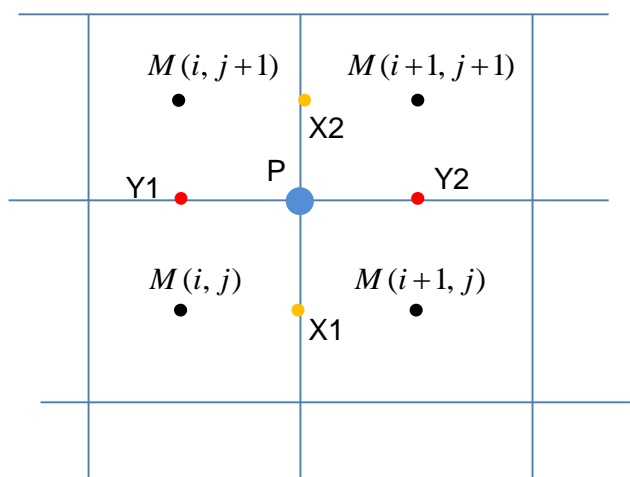
$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ aproxima a $f'(\frac{a+b}{2})$ millor que $f'(c)$ per altres punts pertanyents a $[a,b]$



De tal manera que:

$$\frac{\partial M}{\partial x}(P) = \frac{1}{2} * \underbrace{\left(\frac{M(i+1, j) - M(i, j)}{\Delta x} \right)}_{X1} + \frac{1}{2} * \underbrace{\left(\frac{M(i+1, j+1) - M(i, j+1)}{\Delta x} \right)}_{X2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(P) = \frac{1}{2} * \underbrace{\left(\frac{M(i, j+1) - M(i, j)}{\Delta y} \right)}_{Y1} + \frac{1}{2} * \underbrace{\left(\frac{M(i+1, j+1) - M(i+1, j)}{\Delta y} \right)}_{Y2}$$



3. Aplicació als materials superconductors

Els càlculs que s'han anat fent al llarg del desenvolupament del treball s'han aplicat per un tipus concret de material. Es tracta del YBaCuO, un material superconductor ceràmic, és a dir, a temperatures baixes no oposa resistència al flux d'electricitat que ha de circular.

El coneixement i desenvolupament de la superconductivitat, suposa diversos reptes en la física de l'estat sòlid. Un d'ells és el d'aconseguir fabricar peces que per les seves dimensions tinguin interès tecnològic, és a dir, que sobrepassin l'escala micromètrica o mil·limètrica sense veure reduïdes les seves propietats.

La finalitat dels procediments de càlcul explicats anteriorment, i que com posteriorment veurem s'han traslladat a un programa d'ordinador, és determinar la distribució del corrent elèctric que circula pels materials superconductors i així entendre el comportament que mostren davant l'aplicació de camps magnètics. És a partir de la mesura del camp magnètic en les peces que es podrà calcular el camp elèctric en elles.

3.1. El material superconductor YBaCuO

El YBaCuO està format per òxids d'itri, bari i coure i presenta les propietats superconductores ja a la temperatura del nitrogen líquid, que és amb la que s'ha treballat. Va ser descobert el 1987 per C.W.Chu i va ser el primer material en mostrar aquestes característiques de conducció d'electricitat.

De fet, és un material que actua superconductor a partir de temperatures inferiors la seva temperatura crítica, que és de 92K i relativament alta respecte d'altres materials. Consta d'un gran potencial en aplicacions futures i actualment s'empra en limitadors de corrent i detectors de microones. També per a fenòmens com la levitació o l'efecte *Meissner* sobre l'aparició de resistència nul·la en determinades condicions experimentals.

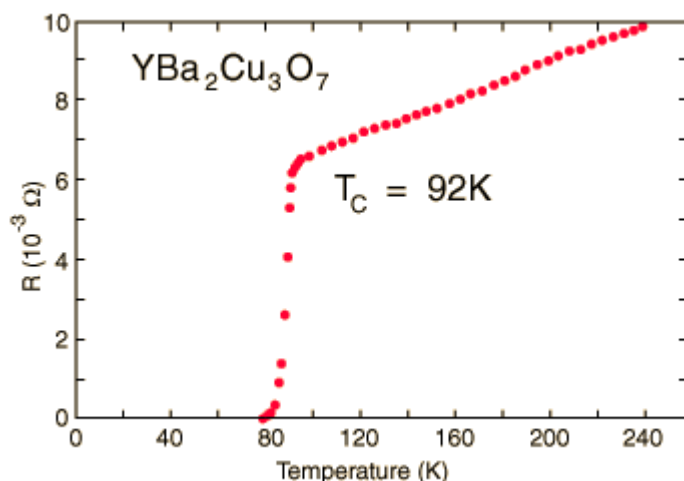


Figura 1. Evolució en el YBaCuO de la resistència al corrent elèctric respecte la temperatura.

Un aspecte important dels materials superconductors és la seva microestructura. D'ella en depèn el camp de corrent crític que es capaç de circular-hi. És per això que la fabricació de peces de YBaCuO és rellevant.

Normalment, el processament de YBaCuO s'efectua en dues etapes:

1- Sinterització

Normalment, les mostres sinteritzades es preparen a partir Y_2O_3 , $BaCO_3$ i CuO en forma de pols d'alta puresa, barrejant-los i calcinant-los a temperatures entre $850\text{ }^{\circ}\text{C}$ - $950\text{ }^{\circ}\text{C}$ durant hores. S'obté així una microestructura de grans/dominis orientats aleatòriament i és per això que la peça condueix malament tant a nivell intragranular com intergranular.

2- Texturació

És la última etapa, i és conseqüència de la necessitat d'orientar els grans. Per aquest motiu, s'ha de produir una solidificació que permeti unes direccions de creixement dominants. Aquesta s'aconsegueix aplicant a través d'un forn, un gradient tèrmic controlat el procés de refredament de la peça, de manera que la direcció de creixement serà la corresponent a la del gradient.

3.2. Dominis d'anàlisi

La mesura del camp magnètic i posteriors càlculs, s'han fet per diversos tipus de dominis:

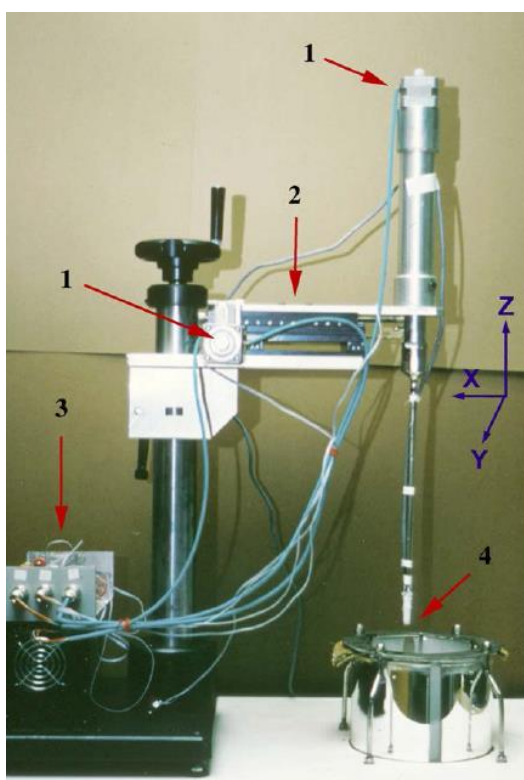
- Cintes superconductores: el YBaCuO està al centre i un metall el tapa per ambdós costats, en forma de sandwich i així aconseguir flexibilitat.
- 'Bulks': mostres 3D d'ordre d'un centímetre per cada dimensió i amb geometries variades
- Stacks de cintes: apilant cintes una sobre l'altra, per crear un gruix apreciable.

3.3. La sonda Hall

Un dels elements més importants en el sistema experimental involucrat en aquest treball és l'ús dels sensors Hall. Aquesta sonda mesura la inducció magnètica als dominis d'anàlisi, que es troben submergits en nitrogen líquid per tal d'evitar interferències amb el medi del sistema i crear una situació similar a la del buit.

El sensor s'ha de moure en un pla xy de reduïdes dimensions (l'escala és mil·limètrica) i a una alçada constant respecte la peça. Hi ha doncs un dispositiu mecànic que permet desplaçar el braç portador de la sonda de manera automatitzada.

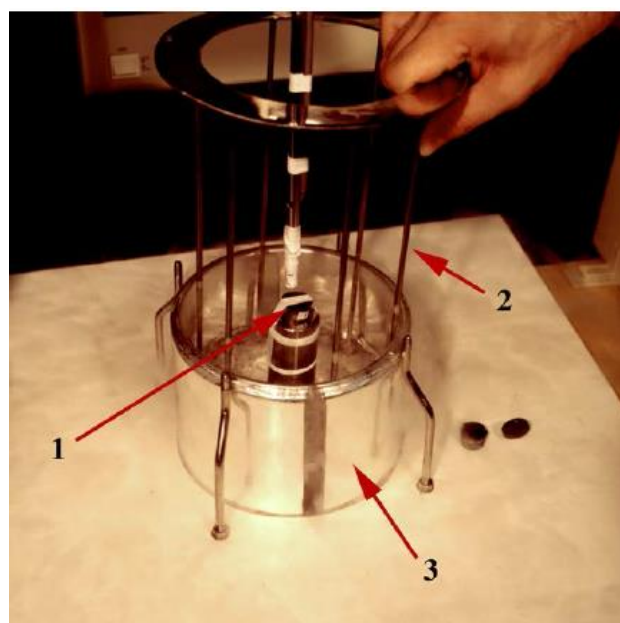
El moviment de la sonda està coordinat amb les mesures del sensor Hall. La sonda realitza petits desplaçaments micromètrics i quan s'atura el sensor pren i registra la tensió d'aquell punt. Mitjançant un calibratge, se n'obté el camp magnètic vertical corresponent.



- (1) motors pas a pas
- (2) plat micromètric
- (3) sistema de relés i targeta de control dels motors
- (4) sonda Hall.

*Imatge 1 Sistema de desplaçament de la sonda Hall.
Extret de [2]*

*Imatge 2. Recinte de l'experiment, amb la peça al centre del recipient banyat en nitrogen líquid.
Extret de [2]*



3.4. Exemples d'estudi

- **Validació del mètode computacional per al càlcul de distribució de corrent elèctrica en una mostra cilíndrica de YBaCuO [3]:**

A través d'una mostra cilíndrica de YBaCuO i la mesura del camp magnètic vertical amb una sonda Hall, que ho fa a una alçada de l'ordre de micròmetres respecte la peça, es pot obtenir la distribució de corrent elèctric del pla xy. A la vegada, amb els resultats obtinguts es pot recalculer el camp B_z i veure si es correspon amb el mesurat.

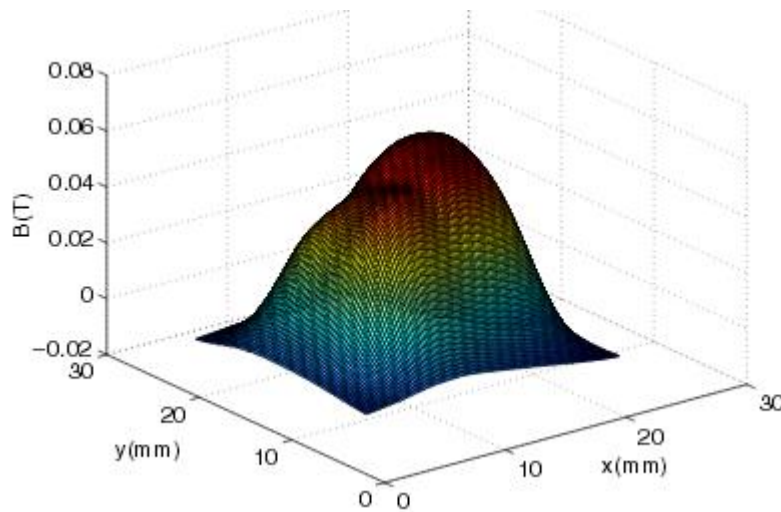


Figura 2. Camp magnètic en la mostra de YBaCuO. Extret de [3]

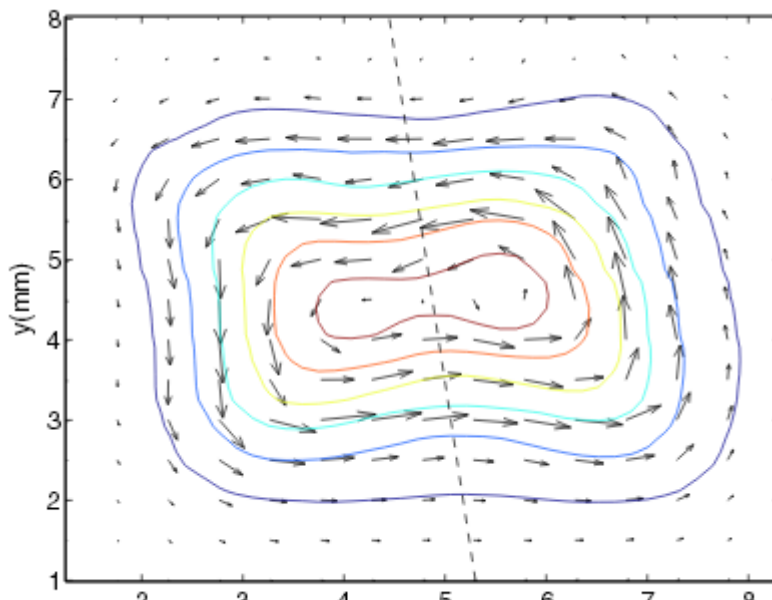


Figura 3. Camp elèctric $J (J_x, J_y, 0)$ calculat, en la mostra de YBaCuO. Extret de [3]

Al tornar a calcular el camp magnètic, a partir dels resultats trobats anteriorment, es pot observar la fidelitat amb que reproduïxen la realitat mesurada, és a dir, els càlculs realitzats poden considerar-se vàlids.

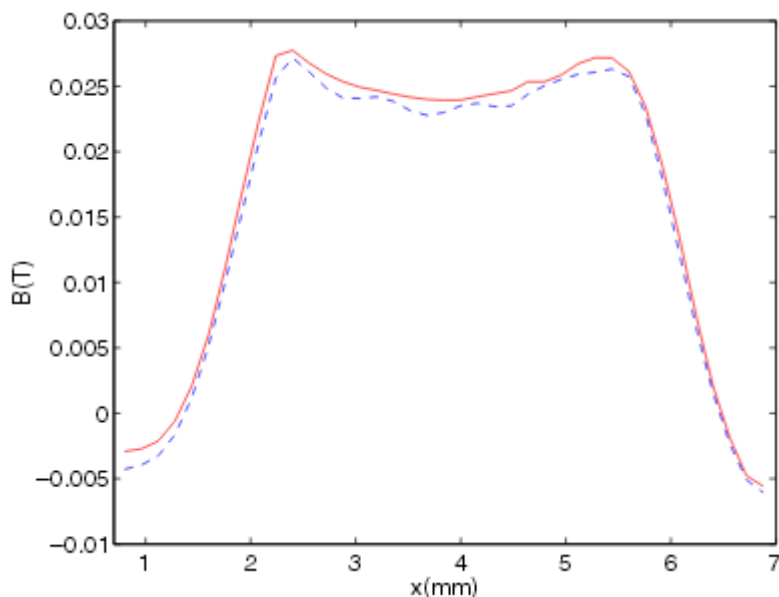


Figura 4. Reproducció de les mesures de $B(T)$ (Línia contínua) i del càlcul de $B(T)$ (Línia discontinua). Extreta de [3]

- **Càlcul de la densitat de corrent en una cinta YBaCuO per a la detecció de defectes en l'homogeneïtat [4]:**

Tot aplicant un camp magnètic B_z en una cinta d'amplada 4,15 mm i 25 μm de gruix, es pot calcular el seu mapa de corrent elèctric. Si aquesta cinta presenta defectes, es pot detectar mitjançant la comparació d'aquest mapa.

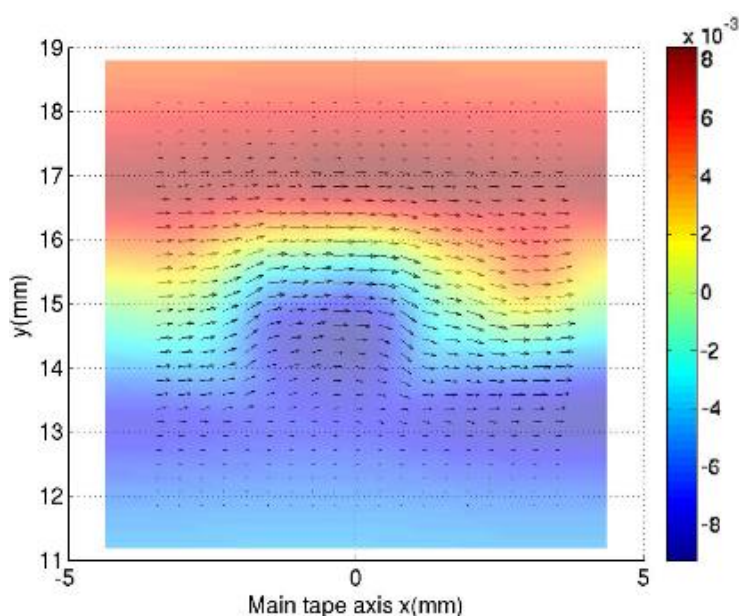


Figura 5. Mapa del camp magnètic B_z en la cinta. Extret de [4].

En aquest cas, fent servir una mateixa cinta, s'han fet tres càlculs:

- El camp elèctric per 85 A aplicats (línia vermella)
- El camp elèctric per 85 A i un defecte en forma de cavitat central a la superfície superior de la cinta. (línia blava)
- El camp elèctric per 80 A (línia discontinua negra)

S'observa clarament la presència del defecte a la part de dalt de la cinta.

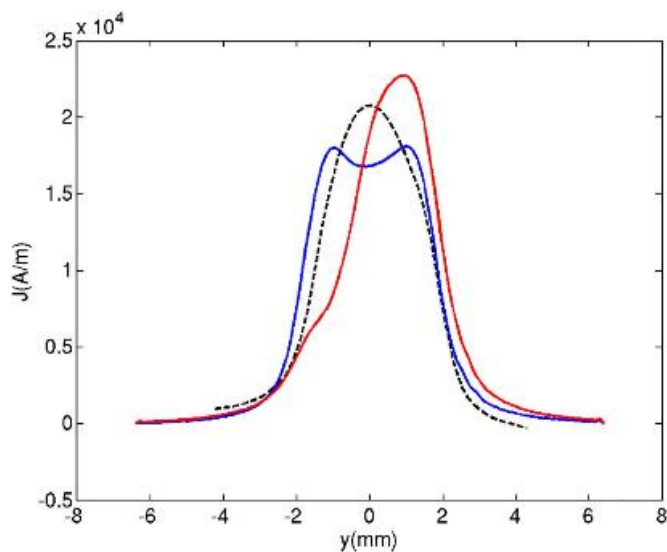


Figura 6. Comparació del corrent elèctric generat a la cinta. Extret de [4].

4. El programa de càlcul

Una vegada comentats els aspectes previs, ja es pot explicar el programa emprat, dins el paquet de càlcul MATLAB. Aquest ha de permetre obtenir diferents figures de la inducció electromagnètica en una peça superconductora a partir de les mesures del camp magnètic vertical, fetes al CSIC. Després de diversos tractaments previs, farà els càlculs a través del desenvolupament de les fórmules:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} M \left[\iint_{[x_0, x_f] \times [z_0, z_f]} - \frac{y_b - y_f}{((x_b - x)^2 + (y_b - y_f)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_b - y_0}{((x_b - x)^2 + (y_b - y_0)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dx dz + \right. \\ \left. \iint_{[y_0, y_f] \times [z_0, z_f]} - \frac{x_b - x_f}{((x_b - x_f)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x_b - x_0}{((x_b - x_0)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} dy dz \right]$$

i

$$\vec{J} = \text{rot } M$$

4.1. Desenvolupament del programa

El programa conté diversos passos:

1. Càrrega del fitxer de dades i paràmetres de la mesura

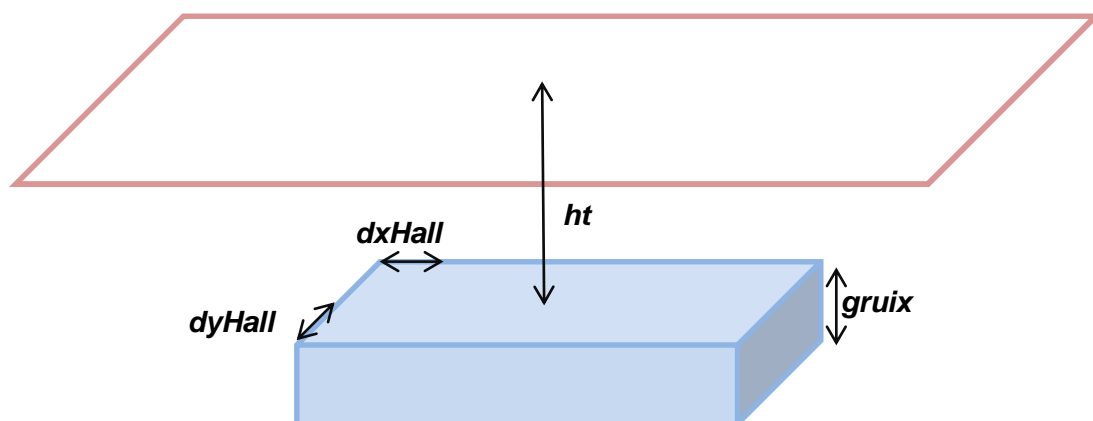
En ell, s'especifica:

- **dxHall** : la distància entre mesures del camp magnètic vertical en l'eix x.
- **dyHall** : la distància entre mesures del camp magnètic vertical en l'eix y.
- **ht** : l'alçada a la que es fan les mesures. No es fa tocant la peça, ja que aquesta està banyada en nitrogen líquid per garantir superconductivitat.
- **gruix** : l'alçada de la peça, corresponent a l'eix z.

```
dxHall=5e-6;
dyHall=2e-4;
ht=2e-4;
gruix=5e-4;
nom='stacknou02_2014_5_23_17_19_';
```

2. Retall de la finestra de mesures de B_z

Les mesures de B_z fetes al CSIC estan circumscrites a un pla més gran que la pròpia mostra.



De cara a evitar valors alts de memòria i errors en els límits del pla (aparició de corrents ficticis), convé reduir l'interval de mesures, tant per les files com per les columnes. S'elegeix doncs tant l'inici com el final, així com el pas que hi ha d'haver entre elles.

Per exemple, per una mesura de 170 x 8000, una reducció d'interval pot ser:

```
% retall columna
col0=1800;
colf=6000;
pasencolumna=50;
% retall fila
fila0=20;
filaf=160;
pasenfila=1;
```

Aquesta elecció es tradueix en el retallat de les mesures de la següent manera:

```
% retallat de la mesura de Bz
Bz2=Bz2(fila0:pasenfila:filaf,col0:pasencolumna:colf);
Bz=Bz2(:);
xb2=xb2(fila0:pasenfila:filaf,col0:pasencolumna:colf);
xb=xb2(:);
yb2=yb2(fila0:pasenfila:filaf,col0:pasencolumna:colf);
yb=yb2(:);
x=xb2(:,1)';
y=yb2(1,:);
```

On **xb**, **yb** i **zb** són les coordenades x, y i z de la malla de mesura de Bz.

3. Assumpció i discretització de la mostra

L'anàlisi del problema comporta l'ús de diferents malles, i cadascuna de elles es troben limitades pels càlculs i teoremes. El programa, per tant, ha d'incloure aquesta diversitat:

- $[xi0, xif] \times [yi0, yif]$: és la malla de discretització de M (mida $mi \times ni$).
- $[x0, xf] \times [y0, yf]$: és la malla de mesura del camp magnètic vertical.
- xm, ym : és la llista de valors de x i y que limita els elements d'imantació.

```
x=xb2(:,1)';
y=yb2(1,:);
zb=ht*ones(size(xb));
m=length(x);
n=length(y);

% on s'assumeix la mostra
xi0=(x(1)+x(end))/2;
xif=(x(end-1)+x(end))/2;
yi0=(y(1)+y(end))/2;
yif=(y(end-1)+y(end))/2;

% discretitzacio de la mostra
mi=58;
ni=72;

xm=linspace(xi0,xif,mi+1);
ym=linspace(yi0,yif,ni+1);
x01=xm(1:end-1);
xf1=xm(2:end);
y01=ym(1:end-1);
yf1=ym(2:end);
[x02,y02]=ndgrid(x01,y01);
[xf2,yf2]=ndgrid(xf1,yf1);
x0=x02(:);
xf=xf2(:);
y0=y02(:);
yf=yf2(:);
z0=-gruix*ones(size(x0));
zf=zeros(size(x0));
ix=xf(1)-x0(1);
iy=yf(1)-y0(1);
```

Si es vol fer un càlcul més precís, s'ha d'augmentar el valor de mi i ni . Per evitar problemes amb l'aplicació del teorema del valor mig, s'ha de treure una fila i una columna de la llista xm, ym .

4. Comprovació prèvia abans del càlcul

Aquest és el darrer pas del programa abans de començar amb el càlculs. La gran quantitat de mesures del camp magnètic vertical, això com el número d'elements contemplats en la peça, pot ocasionar problemes de memòria i de indeterminació.

```
% COMPROVACIO ABANS DEL CALCUL:
nmesures=(colf-col0)/pasencolumna*(filaf-fila0)/pasenfila
nelements=mi*ni
sobredeterminacio=nmesures/nelements
memoria=nmesures*nelements*8
```

Així doncs, el programa es pot avaluar fins aquest punt, de manera que es pot saber:

- Si la memòria necessària pel càlcul pot ser assumida per l'ordinador.
- Si la sobredeterminació existent entre el nombre de mesures i el nombre d'elements és suficientment gran per poder assumir com a bons els resultats. El valor ha de ser d'entre 2 i 10.

5. Càlcul de la matriu del sistema

A partir d'aquest punt, el programa realitza una sèrie de càlculs. En primer lloc, mitjançant un procediment vectorial configurat en un subprograma, troba la matriu G del sistema.

Aquest subprograma es carrega al programa principal de tal manera:

```
'calcula matriu del sistema'
clock
G=calculG2(x0,xf,y0,yf,z0,zf,xb,yb,zb);
```

El subprograma, anomenat **calculG2**, és el desenvolupament de les primitives de G, corresponents a la fórmula:

$$G = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\iint_{[x_0,x_f] \times [z_0,z_f]}^- \left[-\frac{y_b - y_f}{((x_b - x)^2 + (y_b - y_f)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y_b - y_0}{((x_b - x)^2 + (y_b - y_0)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dx dz + \right. \\ \left. \iint_{[y_0,y_f] \times [z_0,z_f]}^- \left[-\frac{x_b - x_f}{((x_b - x_f)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x_b - x_0}{((x_b - x_0)^2 + (y_b - y)^2 + (z_b - z)^2)^{\frac{3}{2}}} \right] dy dz \right]$$

➤ Funció *calculG2*

```
function [ G ] = calculG2(Xo,Xf,Yo,Yf,Zo,Zf,Xb,Yb,Zb )

%Calcul matriu G
Nel=length(Xo);
G=[];
Nef=length(Xb);

for k=1:Nel,

    %Es tracta d'una suma de arcs tangents
    F11=atan(((Zb-Zf(k)).*(Xb-Xf(k)))/((Yb-Yf(k)).*sqrt((Zb-Zf(k)).^2+(Xb-Xf(k)).^2+(Yb-Yf(k)).^2)));
    F12=atan(((Zb-Zf(k)).*(Xb-Xo(k)))/((Yb-Yf(k)).*sqrt((Zb-Zf(k)).^2+(Xb-Xo(k)).^2+(Yb-Yf(k)).^2)));
    F13=atan(((Zb-Zo(k)).*(Xb-Xf(k)))/((Yb-Yf(k)).*sqrt((Zb-Zo(k)).^2+(Xb-Xf(k)).^2+(Yb-Yf(k)).^2)));
    F14=atan(((Zb-Zo(k)).*(Xb-Xo(k)))/((Yb-Yf(k)).*sqrt((Zb-Zo(k)).^2+(Xb-Xo(k)).^2+(Yb-Yf(k)).^2)));

    F1=F11-F12-F13+F14;

    F21=atan(((Zb-Zf(k)).*(Xb-Xf(k)))/((Yb-Yo(k)).*sqrt((Zb-Zf(k)).^2+(Xb-Xf(k)).^2+(Yb-Yo(k)).^2)));
    F22=atan(((Zb-Zf(k)).*(Xb-Xo(k)))/((Yb-Yo(k)).*sqrt((Zb-Zf(k)).^2+(Xb-Xo(k)).^2+(Yb-Yo(k)).^2)));
    F23=atan(((Zb-Zo(k)).*(Xb-Xf(k)))/((Yb-Yo(k)).*sqrt((Zb-Zo(k)).^2+(Xb-Xf(k)).^2+(Yb-Yo(k)).^2)));
    F24=atan(((Zb-Zo(k)).*(Xb-Xo(k)))/((Yb-Yo(k)).*sqrt((Zb-Zo(k)).^2+(Xb-Xo(k)).^2+(Yb-Yo(k)).^2)));

    F2=F21-F22-F23+F24;

    F31=atan(((Zb-Zf(k)).*(Yb-Yf(k)))/((Xb-Xf(k)).*sqrt((Zb-Zf(k)).^2+(Xb-Xf(k)).^2+(Yb-Yf(k)).^2)));
    F32=atan(((Zb-Zf(k)).*(Yb-Yo(k)))/((Xb-Xf(k)).*sqrt((Zb-Zf(k)).^2+(Xb-Xf(k)).^2+(Yb-Yo(k)).^2)));
    F33=atan(((Zb-Zo(k)).*(Yb-Yf(k)))/((Xb-Xf(k)).*sqrt((Zb-Zo(k)).^2+(Xb-Xf(k)).^2+(Yb-Yf(k)).^2)));
    F34=atan(((Zb-Zo(k)).*(Yb-Yo(k)))/((Xb-Xf(k)).*sqrt((Zb-Zo(k)).^2+(Xb-Xf(k)).^2+(Yb-Yo(k)).^2)));

    F3=F31-F32-F33+F34;

    F41=atan(((Zb-Zf(k)).*(Yb-Yf(k)))/((Xb-Xo(k)).*sqrt((Zb-Zf(k)).^2+(Xb-Xo(k)).^2+(Yb-Yf(k)).^2)));
    F42=atan(((Zb-Zf(k)).*(Yb-Yo(k)))/((Xb-Xo(k)).*sqrt((Zb-Zf(k)).^2+(Xb-Xo(k)).^2+(Yb-Yo(k)).^2)));
    F43=atan(((Zb-Zo(k)).*(Yb-Yf(k)))/((Xb-Xo(k)).*sqrt((Zb-Zo(k)).^2+(Xb-Xo(k)).^2+(Yb-Yf(k)).^2)));
    F44=atan(((Zb-Zo(k)).*(Yb-Yo(k)))/((Xb-Xo(k)).*sqrt((Zb-Zo(k)).^2+(Xb-Xo(k)).^2+(Yb-Yo(k)).^2)));

    F4=F41-F42-F43+F44;
    G1=-F1+F2-F3+F4;
    G=[G,G1];
end

G=1e-7*G;
```

6. Resolució del sistema $Bz = G \cdot M$

Una vegada calculada la matriu G , el següent pas és obtenir-ne M , corresponent als vectors imantació de la peça.

A més a més, també es troben els punts mitjos de cada element de M i es recalcula el camp magnètic, com a resultant de les matrius G i M trobades. El motiu, serviran per aconseguir algunes de les figures finals, així com la comprovació del residu.

```
'resol el sistema'
clock
M=G\Bz;
% converteix M en taula rectangular de valors
M2=reshape(M,mi,ni);
% coordenades x,y dels punts mitjos de cada element de M
xm2=(x02+xf2)/2;
ym2=(y02+yf2)/2;
Bd=G*M;
Bd2=reshape(Bd,m,n);
```

7. Càlcul del nombre de condició i el camp elèctric J

El nombre de condició d'una matriu permet acotar l'error relatiu comès. A més petit sigui aquest valor, els resultats trobats seran més propers als valors exactes.

El camp elèctric J es calcula a partir de la fórmula del rotacional ($\vec{J} = \text{rot } M$) i el desenvolupament dels teoremes matemàtics anteriorment explicats.

```
'calcula el nombre de condicio'
clock
condicio=cond(G);

'calcula J'
diffMy=diff(M2.').';
diffMx=diff(M2);
Jx2=(diffMy(1:end-1,:)+diffMy(2:end,:))/(2*iy);
Jy2=-(diffMx(:,1:end-1)+diffMx(:,2:end))/(2*ix);
Jv2=sqrt(Jx2.*Jx2+Jy2.*Jy2);
% valors de x,y en que es te calculada la J
xj2=x02(2:end,2:end);
yj2=y02(2:end,2:end);
```

8. Emmagatzematge dels resultats

Una vegada fet els diferents càlculs i per tal de facilitar posteriors operacions, convé guardar-los en un fitxer de dades, de manera que es tindrà a disposició per a posteriors anàlisis.

```
'guarda resultats'
clock
resultats=['calcul_' nom '.mat'];
save(resultats,'M2','Jx2','Jy2','Jv2','Bz2','xm2','ym2','xj2','yj2','xb2','yb2','gruix','ht','condicio','Bd2');
```

9. Obtenció de les figures descriptives

Per acabar, el programa procedeix a mostrar diverses figures que permeten veure:

- El camp magnètic vertical B_z (figura 3d)

```
% graf de Bz mesurada
figure(1)
mesh(xb2,yb2,Bz2);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('B_z');
fitxerfig=['Bz_' nom '.png'];
print('-dpng',fitxerfig);
```

- El camp d'imantació M (figura 3d)

```
figure(2)
% graf de M calculada
mesh(xm2,ym2,M2);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('M');
fitxerfig=['M_' nom '.png'];
print('-dpng',fitxerfig);
```


- La densitat de corrent i corbes de nivell del camp elèctric vertical J_v (figura 2d)

```
figure(3)
% graf de densitat de corrent Jv
mesh(xj2(7:end-6,4:end-3),yj2(7:end-6,4:end-3),Jv2(7:end-6,4:end-3));
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('J_v');
fitxerfig=['Jv_' nom '.png'];
print('-dpng',fitxerfig);

figure(4)
% corbes de nivell de la densitat de corrent Jv
C=contour(xj2(7:end-6,4:end-3),yj2(7:end-6,4:end-3),Jv2(7:end-6,4:end-3));
clabel(C);
xlabel('x');
ylabel('y');
fitxerfig=['contorndensitatJ_' nom '.png'];
print('-dpng',fitxerfig);
```

- El camp vectorial del camp elèctric del pla x-y

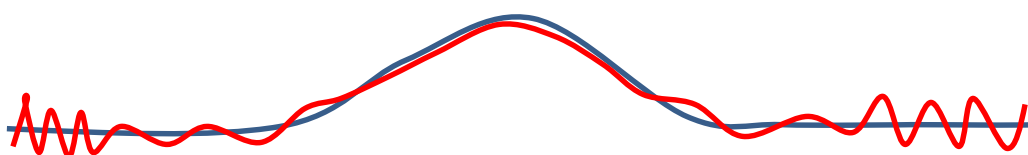
```
figure(5)
% camp vectorial del corrent Jx,Jy
quiver(xj2,yj2,Jx2,Jy2);
xlabel('x');
ylabel('y');
fitxerfig=['mapacorrent_' nom '.png'];
print('-dpng',fitxerfig);
```

4.2. Aparició dels corrents ficticis en el càlcul de M

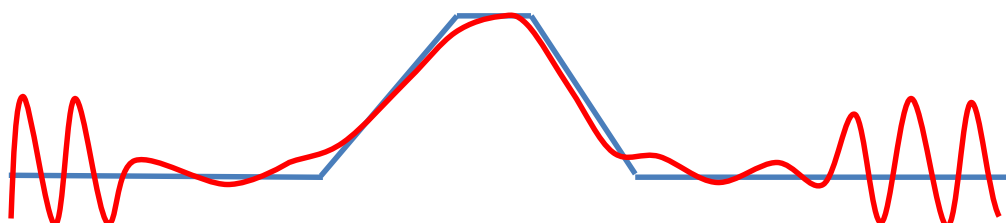
El programa de càlcul emprat té limitacions que si no es saben detectar, poden aparèixer a les figures descriptives.

Una d'elles és l'anomenat fenomen dels **corrents ficticis**, que es pot observar fent un tall transversal en una figura representativa de M. Per tal de fer-los desaparèixer doncs és clau encertar la reducció de l'interval de mesures de Bz que es fa al començament del programa, és a dir, modificar els termes *fila0* , *filaf*, *col0*, *colf*.

La imantació calculada respecta la real pot diferir en gran mesura en els extrems d'un perfil i això es trasllada de manera més accentuada al camp elèctric J.



- Perfil de la imantació M real.
- Perfil de la imantació M calculada



- Perfil del camp elèctric J real.
- Perfil del camp elèctric J calculat.

4.3. Nombre de condició de la matriu G

El nombre de condició és un element de l'àlgebra lineal numèrica i la geometria. En l'estudi desenvolupat en el present treball, és important en la determinació de l'error relatiu comès en el càlcul del programa.

El sistema matricial en el que es basa el procediment és $[G] * [M] = [Bz]$ que es vol calcular la imantació M , però realment el que es coneix no és B , sinó $Bz' = Bz + \Delta B$ on:

- Bz és el camp magnètic exacte.
- ΔB és l'error comès en la mesura.

Així doncs, la solució que es troba és una imantació $M' = M + \Delta M$. Per garantir uns càlculs fiables, s'ha d'acotar $\frac{\|\Delta M\|}{\|M\|}$ en la solució M' .

Operant en el sistema matricial inicial:

$$G * M' = Bz'$$

$$G * M + G * \Delta M = B + \Delta B$$

$$G * \Delta M = \Delta B$$

$$\|\Delta M\| \leq \|G^{-1}\| * \|\Delta B\|$$

$$\frac{\|\Delta M\|}{\|M\|} \leq \frac{1}{\|M\|} * \|G^{-1}\| * \|\Delta B\| = \frac{\|G\|}{\|B\|} * \|G^{-1}\| * \|\Delta B\|$$

Finalment, la desigualtat queda com:

$$\frac{\|\Delta M\|}{\|M\|} \leq \|G^{-1}\| * \|G\| * \frac{\|\Delta B\|}{\|Bz\|} = \text{cond}(G) * \frac{\|\Delta B\|}{\|Bz\|}$$

Es pot observar com l'error relatiu dels càlculs és proporcional el nombre de condició de la matriu G . A més alt sigui aquest valor, l'error relatiu incrementarà i això podrà visualitzar-se en les figures, en forma de pendents exagerats i superfícies rugoses.

Tot i no existir un límit exacte, es considerarà un càlcul com a fiable quan el valor del nombre de condició sigui inferior a 100.

Per matrius petites, es calcula com:

$$\text{cond}(G) = \frac{\sigma_1}{\sigma_r}$$

- σ_1 : valor singular màxim de la descomposició en valors singulars de G
- σ_r : valor singular mínim de la SVD de G

Com que la matriu G està formada per milions de nombres, el càlcul específic del nombre de condició l'efectua el MATLAB, mitjançant la comanda ' $\text{cond}(G)$ '.

4.4. Comprovació del residu

La comprovació del residu és el pas final per a la verificació dels càlculs del programa. En el nostre problema, el sistema lineal $[G] * [M] = [Bz]$ és un sistema sobredeterminat que es resol per mínims quadrats.

Aquesta resolució implica l'existència del residu $r = G * M - Bz$ en que $G * M$ és el camp magnètic vertical Bd calculat a partir de la solució de M trobada.

El residu $r = Bd - Bz$, és doncs la diferència entre el camp magnètic calculat i el mesurat, calculada per mínims quadrats.

En aquest sentit, s'han aplicat dos procediments: l'obtenció de figures comparatives del camp magnètic vertical Bz mesurat respecte el recalculat Bd ; i el càlcul del residu en punts d'interès i la seva norma.

Pel que fa a les figures:

- Tall transversal de Bz i Bd per una fila.

```
figure(7)
f=round(size(xb2,1)/2);
hold on
plot(yb2(f,:),Bz2(f,:), 'b')
plot(yb2(f,:),Bd2(f,:), 'r')
hold off
xlabel('y');
ylabel('B_z mesurada (blau) B_d calculada (roig)');
fitxerfig=['comparacio_fila_' nom '.png'];
print('-dpng',fitxerfig);
```

- Tall transversal de B_z i B_d per una columna.

```
figure(8)
c=round(size(xb2,2)/2);
hold on
plot(xb2(:,c),Bz2(:,c),'b')
plot(xb2(:,c),Bd2(:,c),'r')
hold off
xlabel('x');
ylabel('B_z mesurada (blau) B_d calculada (roig)');
fitxerfig=['comparacio_columna_' nom '.png'];
print('-dpng',fitxerfig);
```

- Distribució 2D del residu respecte les figures de B_z i B_d .

```
% mapa 2-dimensional del residu
figure(9)
filares0=5;
filaresf=size(xb2,1)-4;
colres0=5;
colresf=size(xb2,2)-4;
t=xb2(filares0:filaresf,colres0:colresf)
s=yb2(filares0:filaresf,colres0:colresf)
r=residu2(filares0:filaresf,colres0:colresf)
mesh(t,s,r);
xlabel('x');
ylabel('y');
zlabel('residu');
fitxerfig=['residu_' nom '.png'];
print('-dpng',fitxerfig);
```

5. Aplicació en mostres reals

El programa de càlcul MATLAB ha servit per realitzar tres estudis sobre mostres reals, tenint en compte aspectes clau com el retall previ de mesures, la memòria necessària o la sobredeterminació. Aquestes mostres són un conjunt de cintes de gruix micromètric apilades una sobre la altra.

| Taula de característiques | Camp de mesures | Separació entre mesures 'dxHall' | Separació entre files 'dyHall' | Alçada relativa de la sonda 'hf' | Gruix de la mostra 'gruix' |
|---------------------------|-----------------|-------------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------|
| Mostra 1 – Stack L30 | 200 x 8000 | 5 μm | 200 μm | 500 μm | 500 μm |
| Mostra 2 – Stack 2pols | 200 x 8000 | 5 μm | 200 μm | 200 μm | 500 μm |
| Mostra 3 – Stack nou | 170 x 8000 | 5 μm | 200 μm | 200 μm | 500 μm |

5.1. Mostra 1 – Stack L30

Per aquesta primera mostra, s'han aplicat els següents retalls i dimensionaments:

- Retall de la finestra del camp magnètic vertical

| Columna inicial 'col0' | Columna final 'colf' | Pas entre columnes 'pasencolumna' | Fila inicial 'fila0' | Fila final 'filaf' | Pas entre files 'pasenfila' |
|---------------------------|-------------------------|--------------------------------------|-------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| 950 | 6530 | 60 | 34 | 222 | 1 |

- Dimensió dels camps magnètic, elèctric i d'imantació

| Camp Bz | Camp Jv | Camp M (mi x ni) |
|----------|---------|------------------|
| 94 x 189 | 57 x 71 | 58 x 72 |

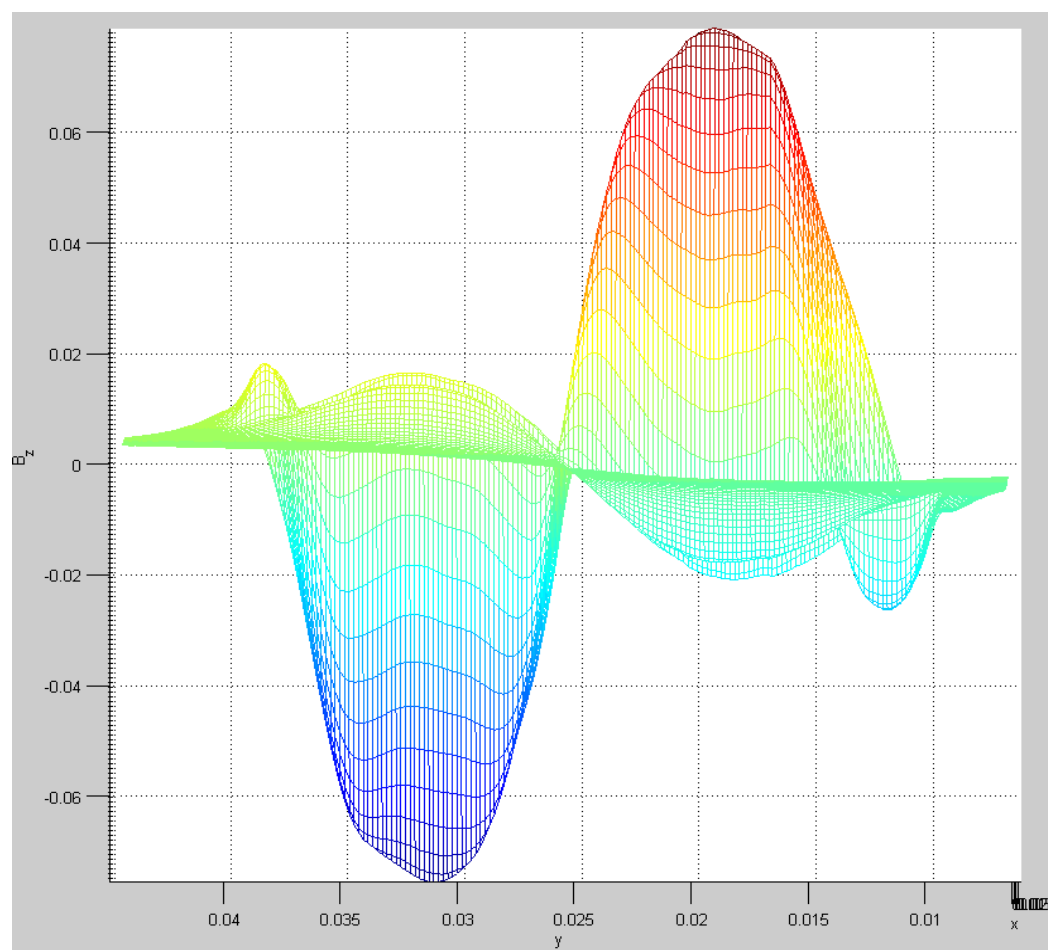
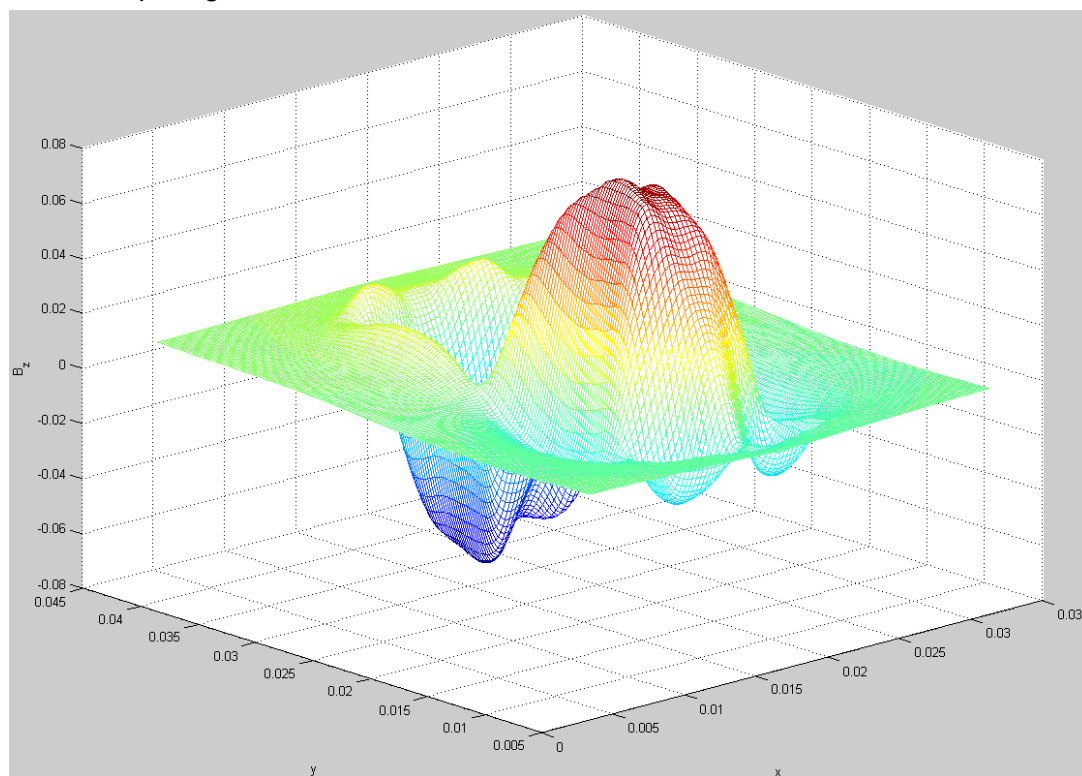
- Característiques del càlcul

| Nombre de mesures | Nombre d'elements | Sobredeterminació | Nombre de condició | Memòria necessària (MB) |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------------|
| 17484 | 4176 | 4,19 | 26,75 | 584,1 |

- Figures obtingudes

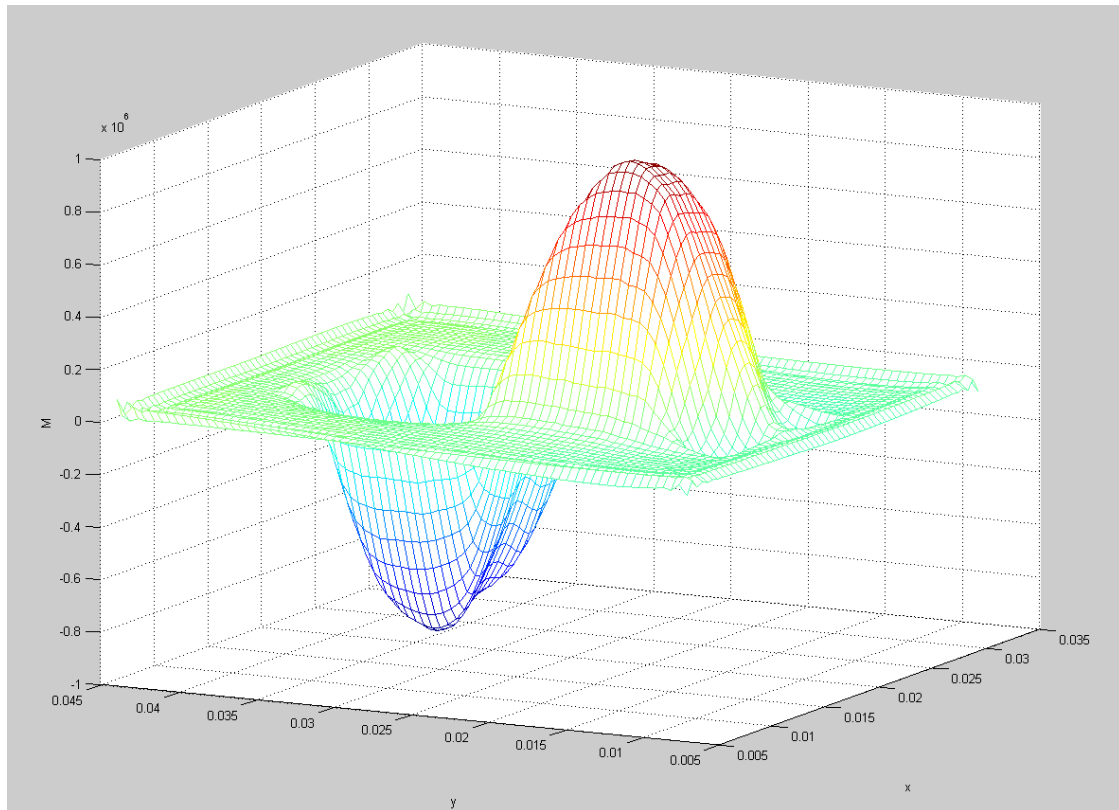
- Camp magnètic vertical B_z

És resultat del tractament de les mesures fetes per la sonda Hall. Es poden observar els dos pols magnètics de signes diferents que es troben a la cinta. El valor màxim del camp magnètic vertical és de 0,08 T.



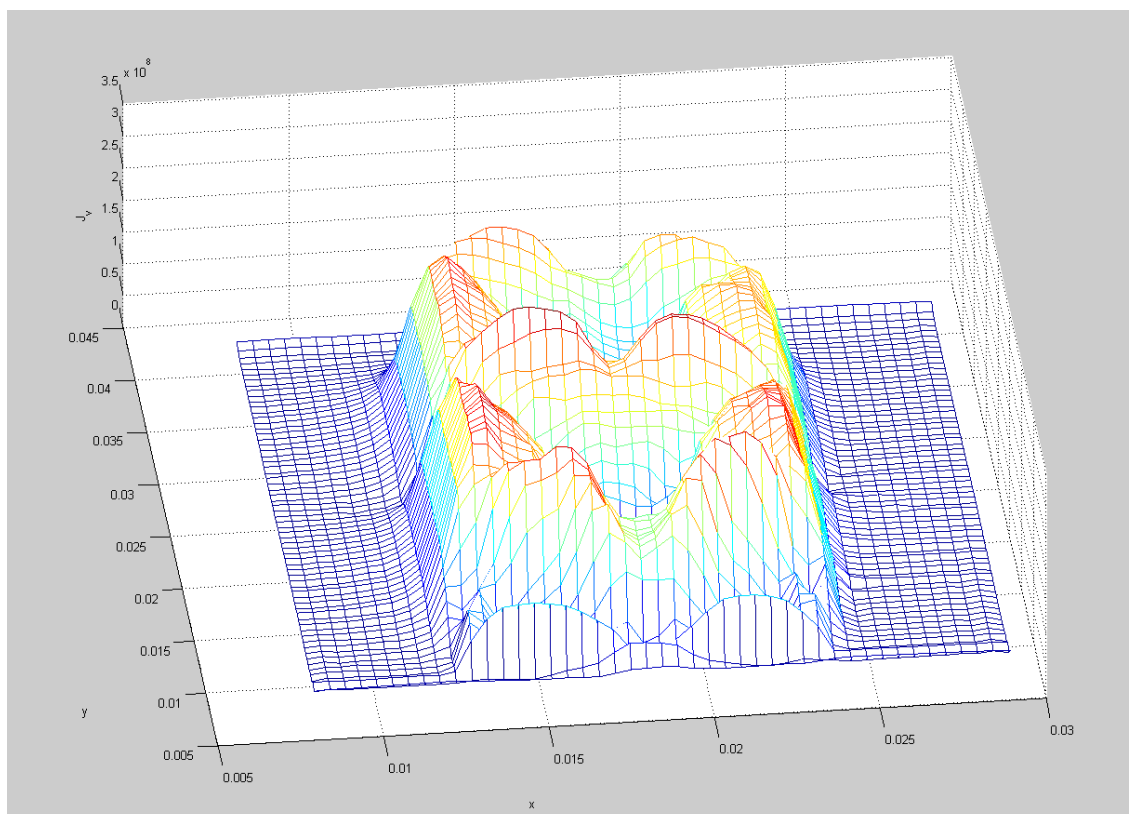
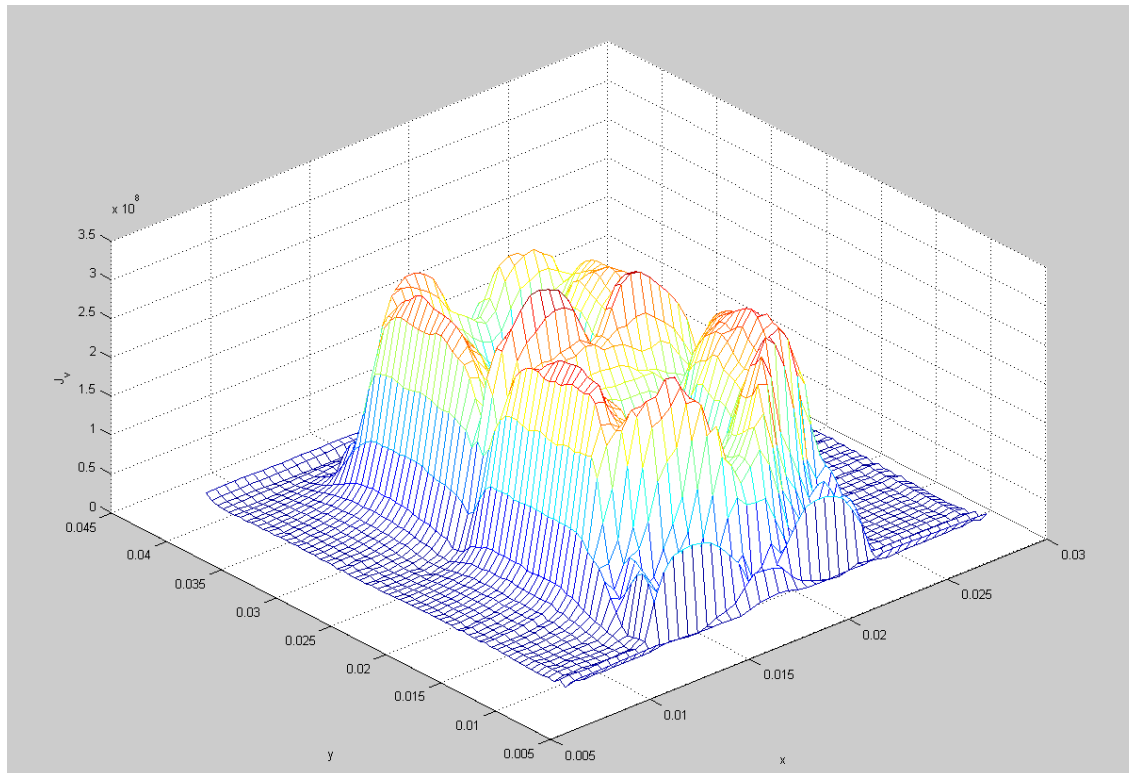
- El camp d'imantació M :

S'assembla molt a la figura del camp B_z , i és que de fet s'ha de recordar que es tracta d'una proporció $B_z = G \cdot M$. El seu valor màxim és de $0,8 \times 10^6$. En afegit, un nombre de condició alt comportaria veure una figura més abrupta i rugosa en que la superfície seria menys llisa, amb més irregularitats.



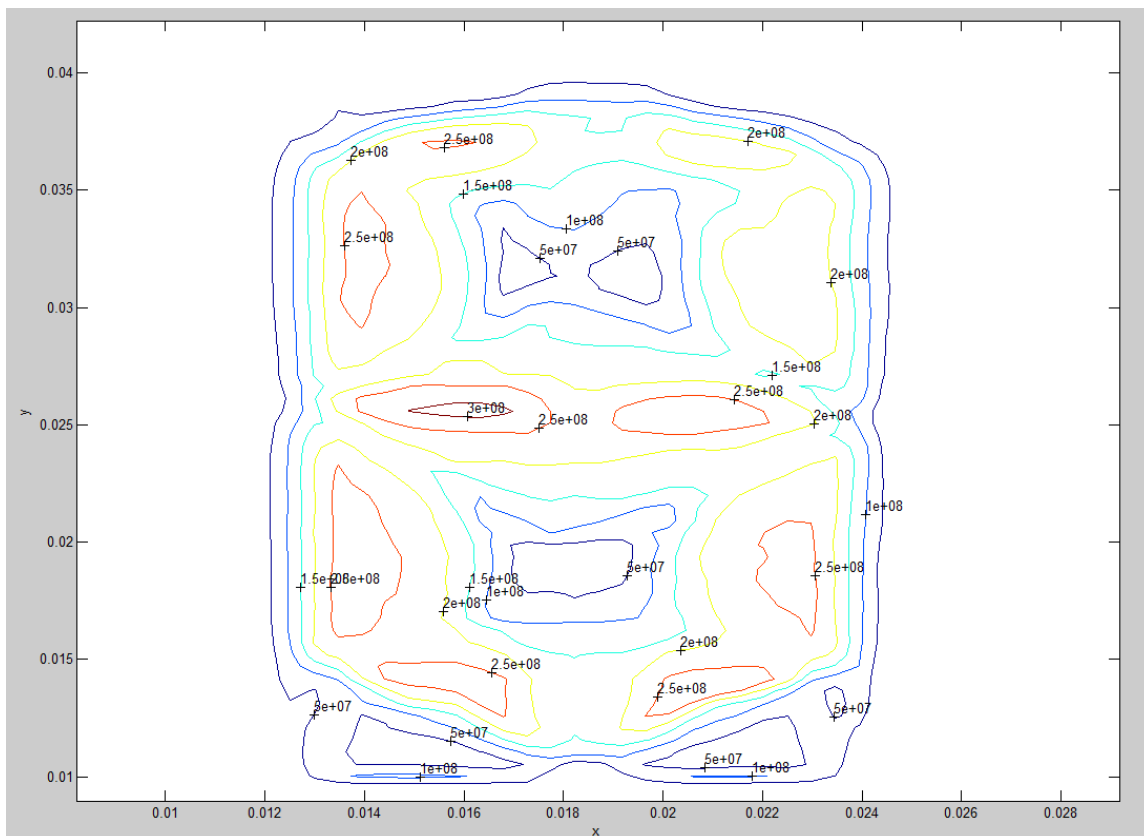
- La densitat del camp de corrent elèctric vertical J_v :

En els pols és nul mentre que ho rodeja amb valors elevats que descriuen dues formes rectangulars



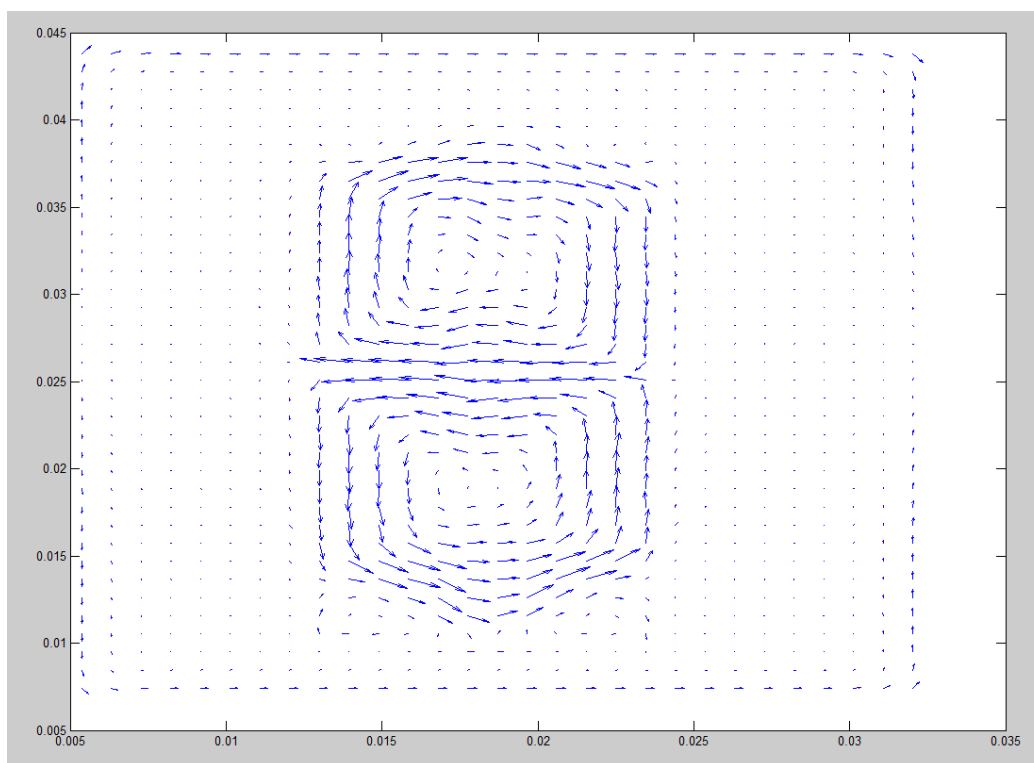
- Les corbes de nivell del corrent de J_v :

Es comprova la tendència mostrada en les figures anteriors. Els valors oscil·len des dels $5 \cdot 10^7$ a $2,5 \cdot 10^8$ A. Els màxims corrents conformen dos rectangles i els mínims es troben al seu interior



- El camp vectorial dels corrents J_x , J_y

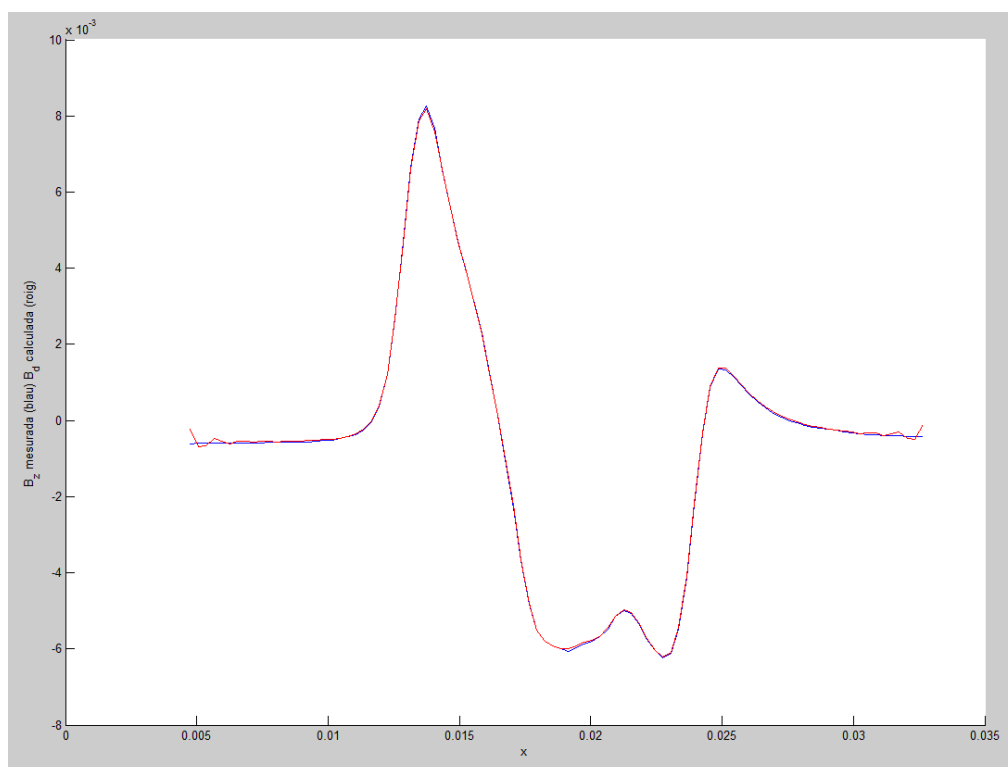
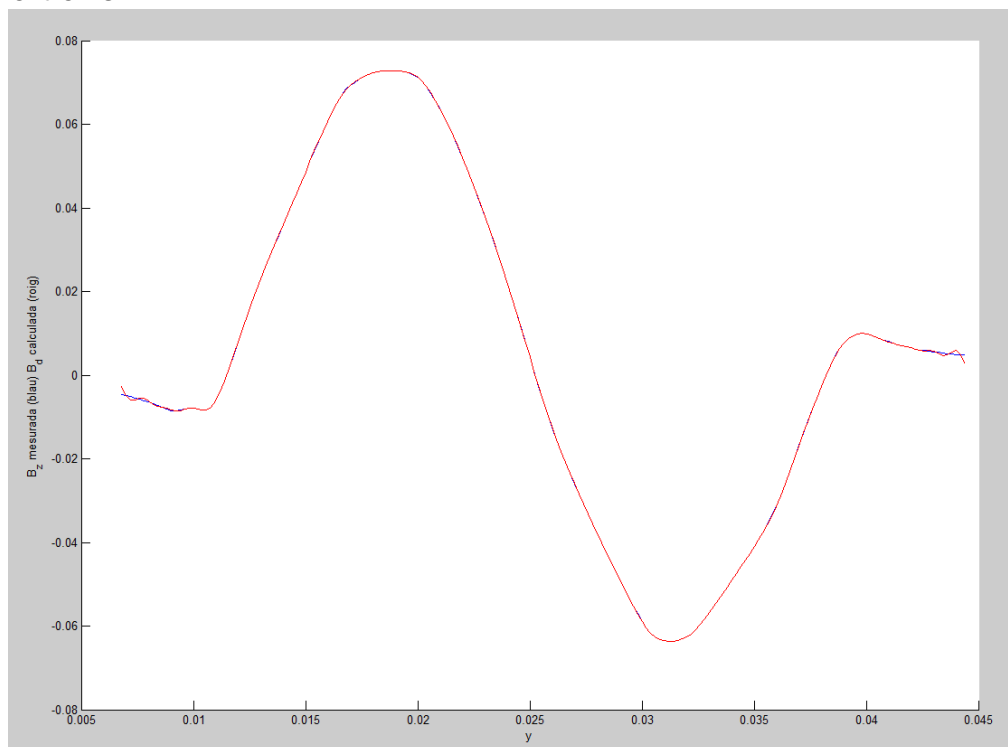
Es poden veure dos girs, un en sentit horari i l'altre en sentit antihorari, generant així els dos pols de camp magnètic vists anteriorment.



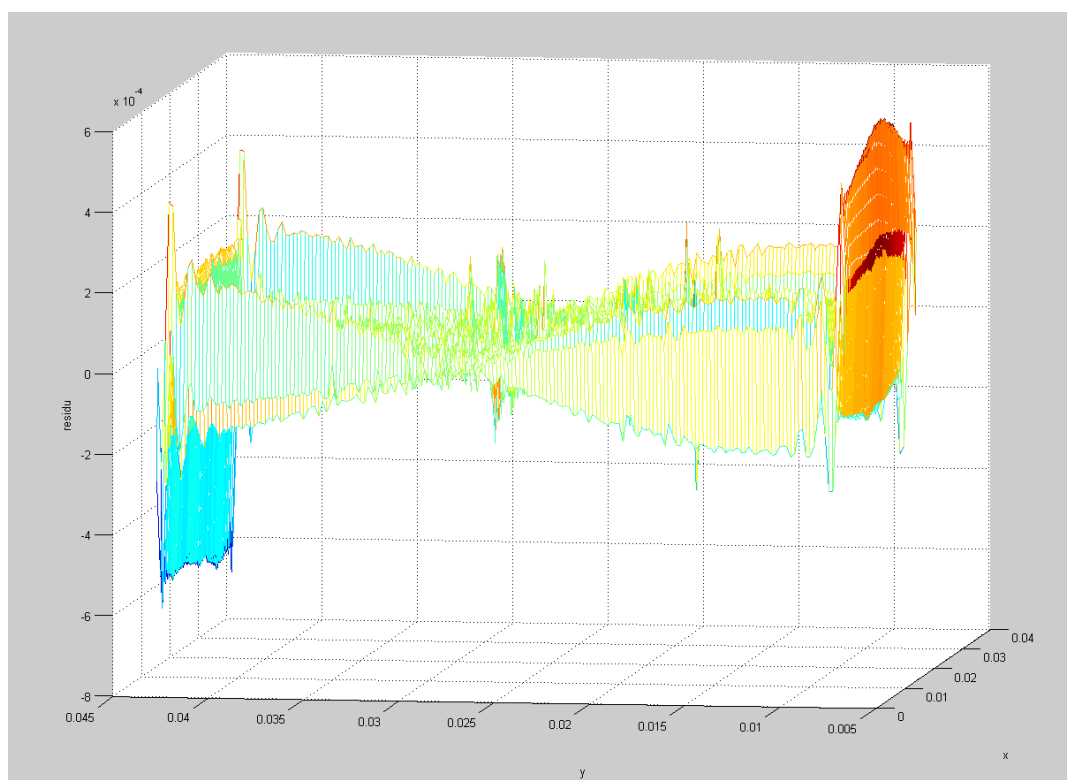
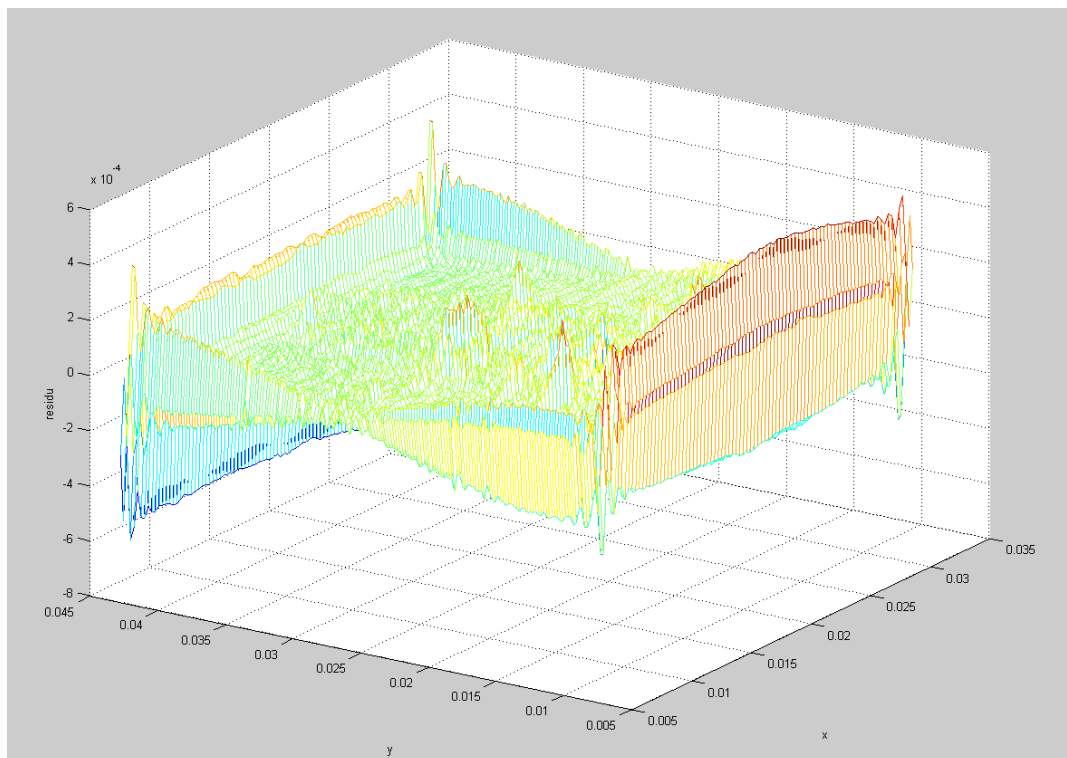
▪ Els talls transversals per a la visualització del residu:

En el primer tall, es pot veure l'evolució per una fila del camp magnètic B_z mesurat (en blau), respecte el camp magnètic B_d recalculat (en vermell). En el segon tall, es descriuen els mateixos camps, però per una columna de les mesures.

En ambdós casos, la diferència és mínima i només s'observen distanciaments als extrems.



Aquesta figura ens il·lustra com és el residu $r = Bd - Bz$ generat pels càlculs del programa, en l'extensió de les mesures preses. El residu és nul per la part central on s'hi troben els dos pols magnètics, mentre que és més gran pels costats (al voltant de $4 \cdot 10^{-6}$) fruit de les limitacions del programa MATLAB.



5.2. Mostra 2 – Stack 2 pols

Per aquesta mostra, s'han aplicat aquests retalls i dimensionaments:

- Retall de la finestra del camp magnètic vertical

| Columna inicial 'col0' | Columna final 'colf' | Pas entre columnes 'pasencolumna' | Fila inicial 'fila0' | Fila final 'filaf' | Pas entre files 'pasenfila' |
|---------------------------|-------------------------|--------------------------------------|-------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| 1900 | 6100 | 50 | 15 | 175 | 1 |

- Dimensió dels camps magnètic, elèctric i d'imantació

| Camp Bz | Camp Jv | Camp M (mi x ni) |
|----------|---------|------------------|
| 85 x 161 | 57 x 71 | 58 x 72 |

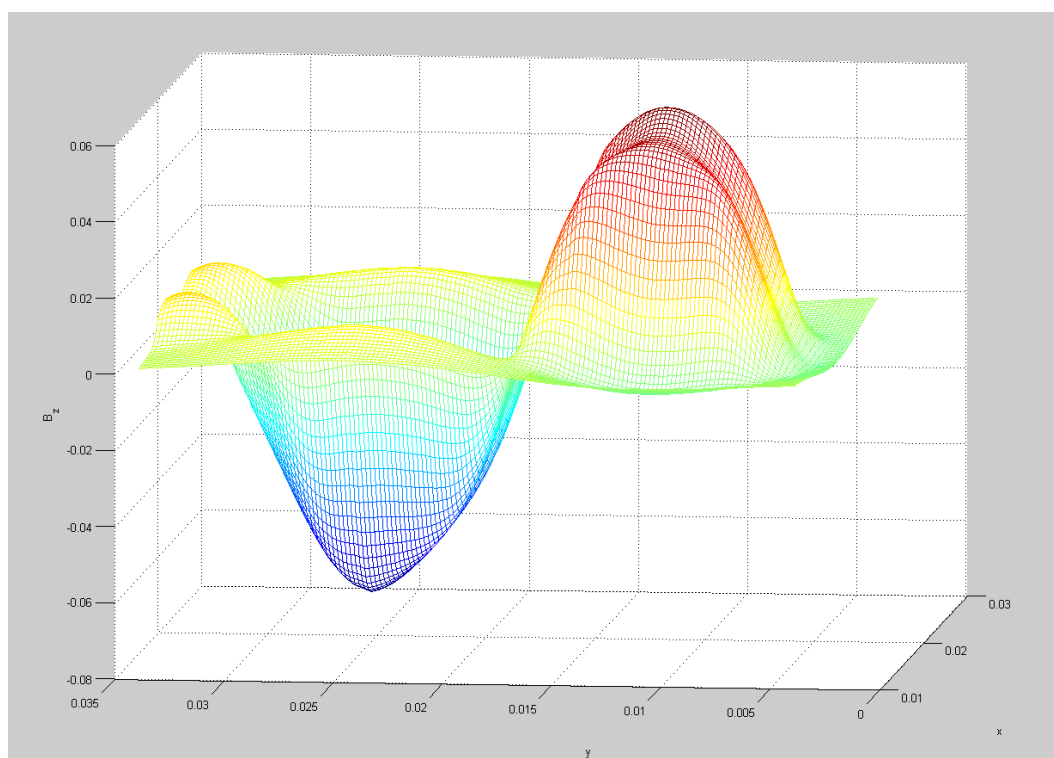
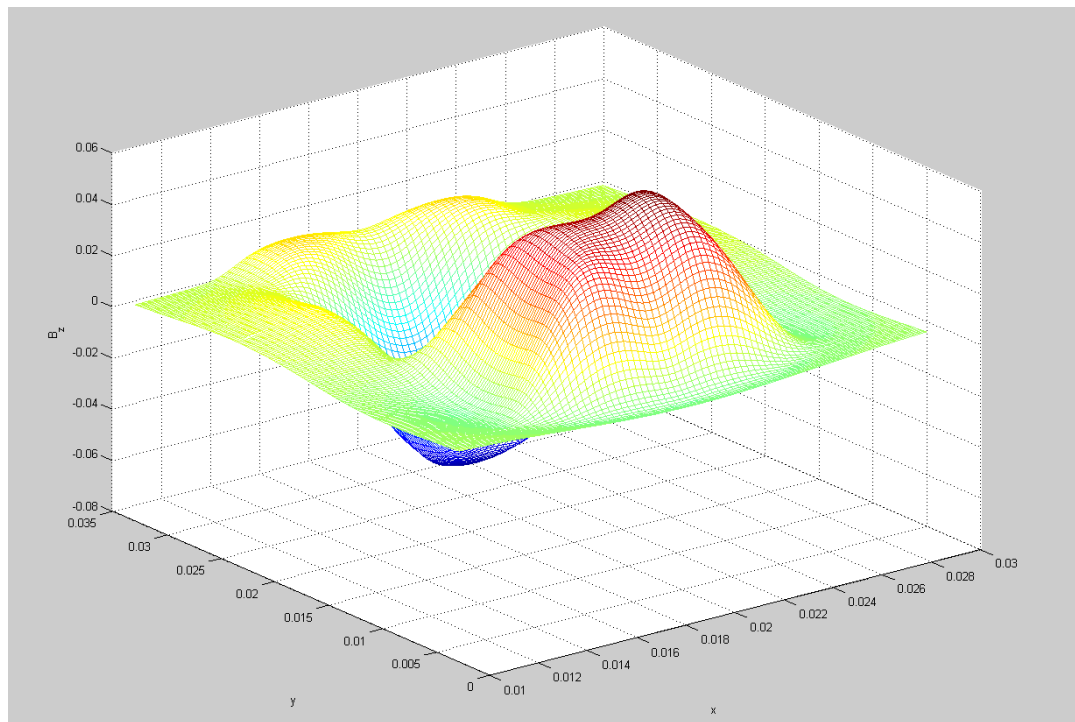
- Característiques del càlcul

| Nombre de mesures | Nombre d'elements | Sobredeterminació | Nombre de condició | Memòria necessària (MB) |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------------|
| 13440 | 4176 | 3,2184 | 86,0968 | 449 |

- Figures il·lustratives

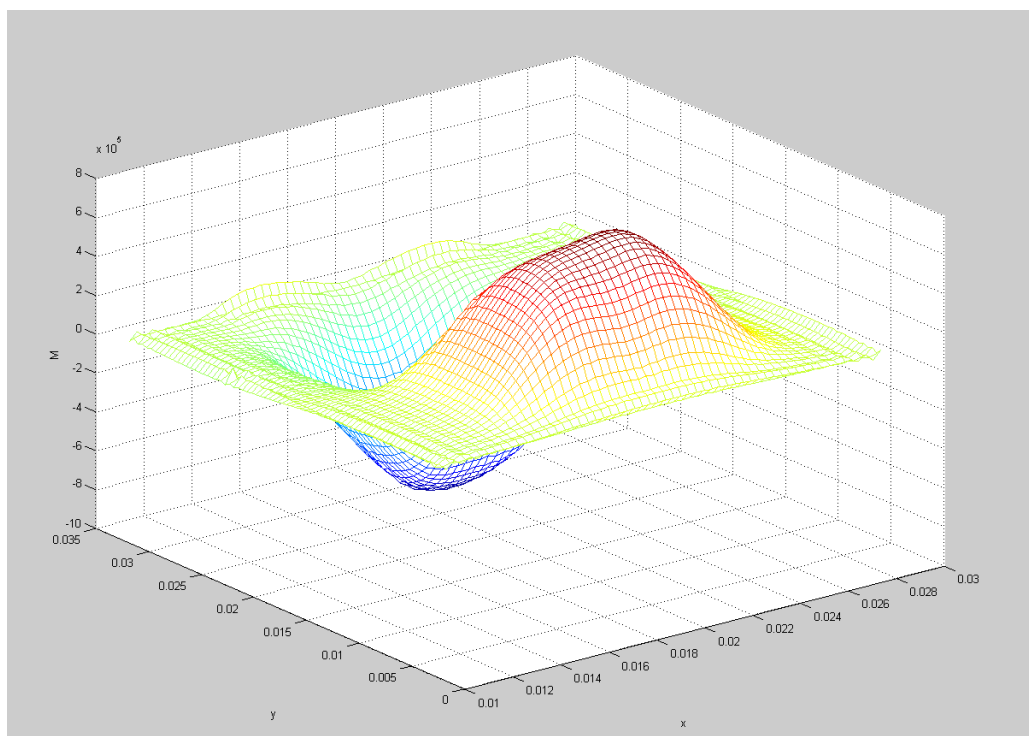
- Camp magnètic vertical B_z

El perfil de camp magnètic és semblant a la primera mostra. Té dos pols, però menys pronunciats i de silueta menys abrupta. Els valors màxims tornen a ser propers als 0,8 T.



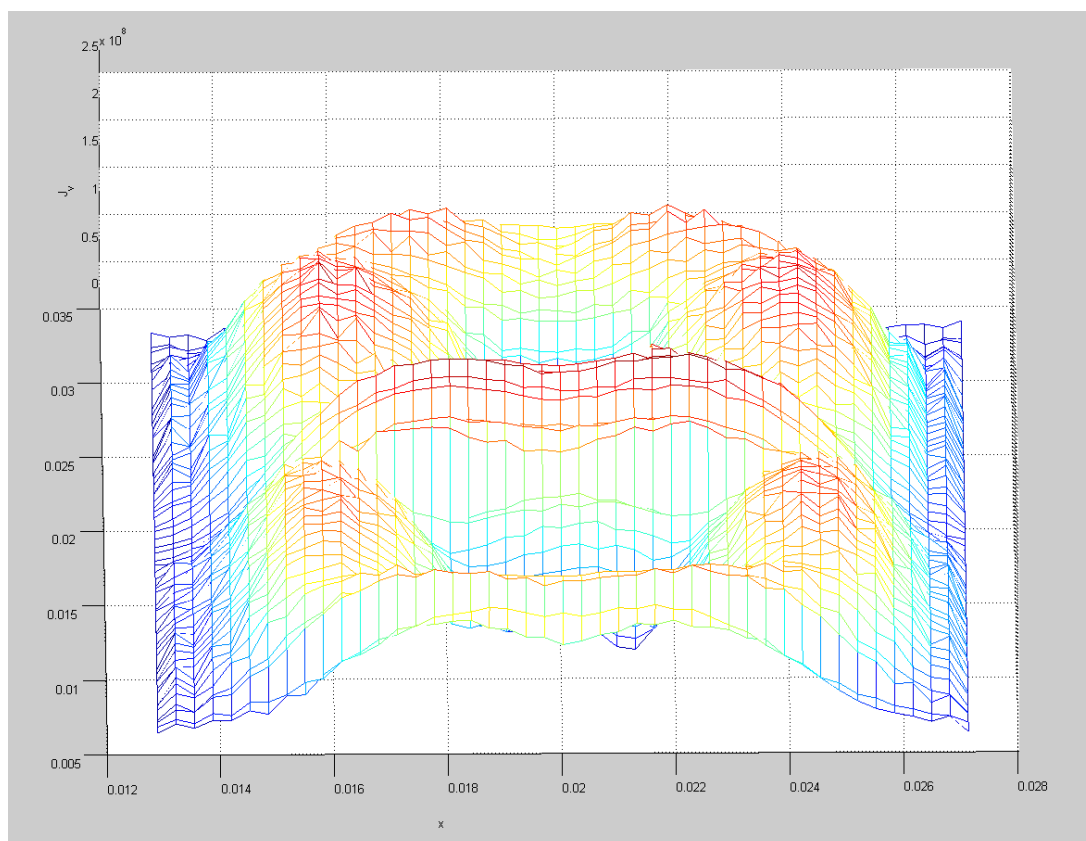
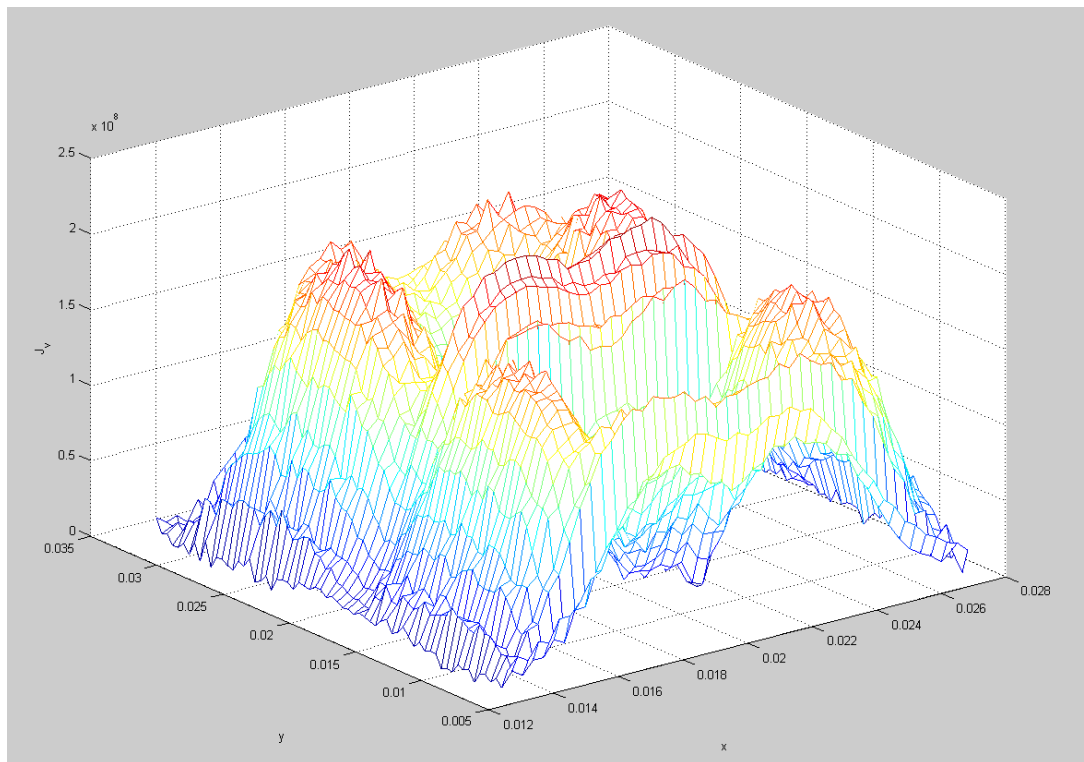
- El camp d'imantació M :

Per proporcionalitat, la figura és semblant a la del B_z .



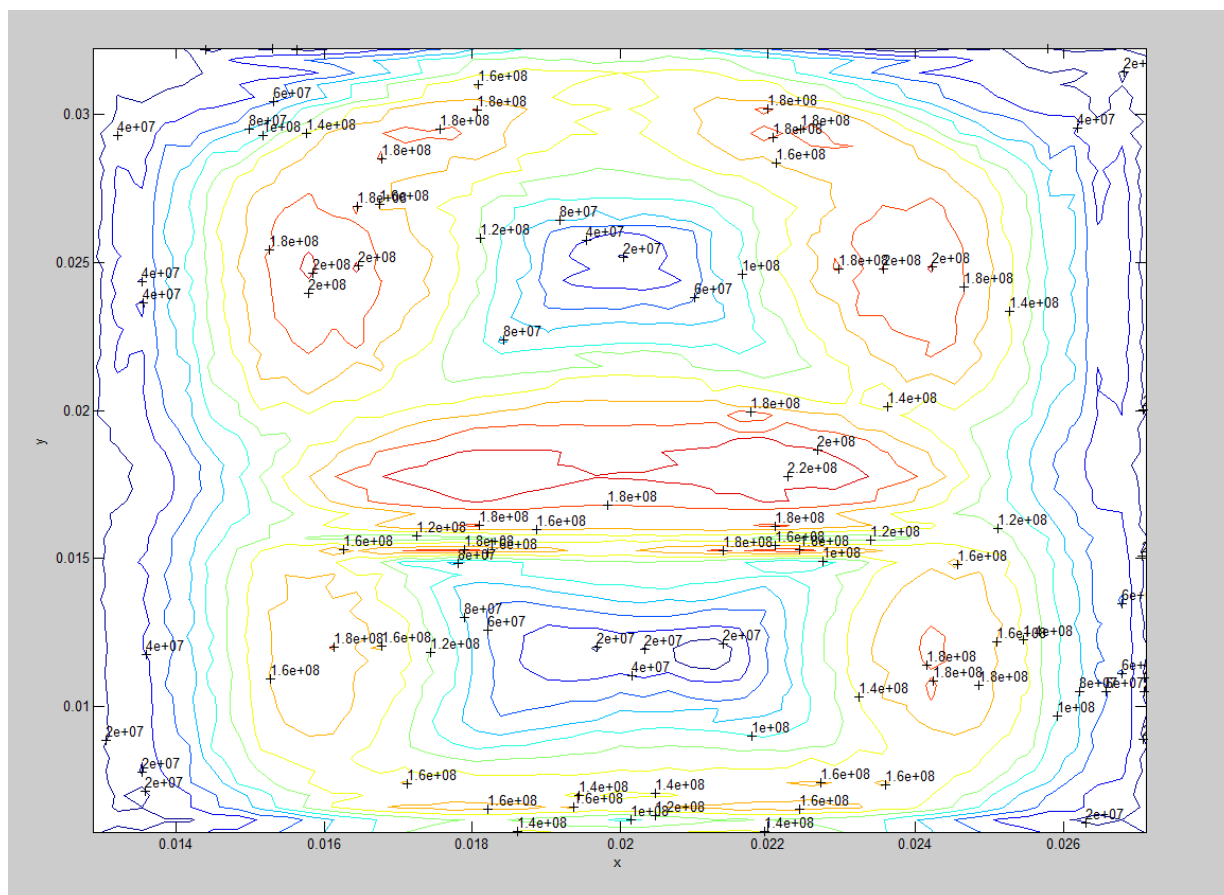
- La densitat del camp de corrent elèctric vertical J_v :

El corrent elèctric vertical torna a estar format per dos rectangles coincidents en un dels seus costats.



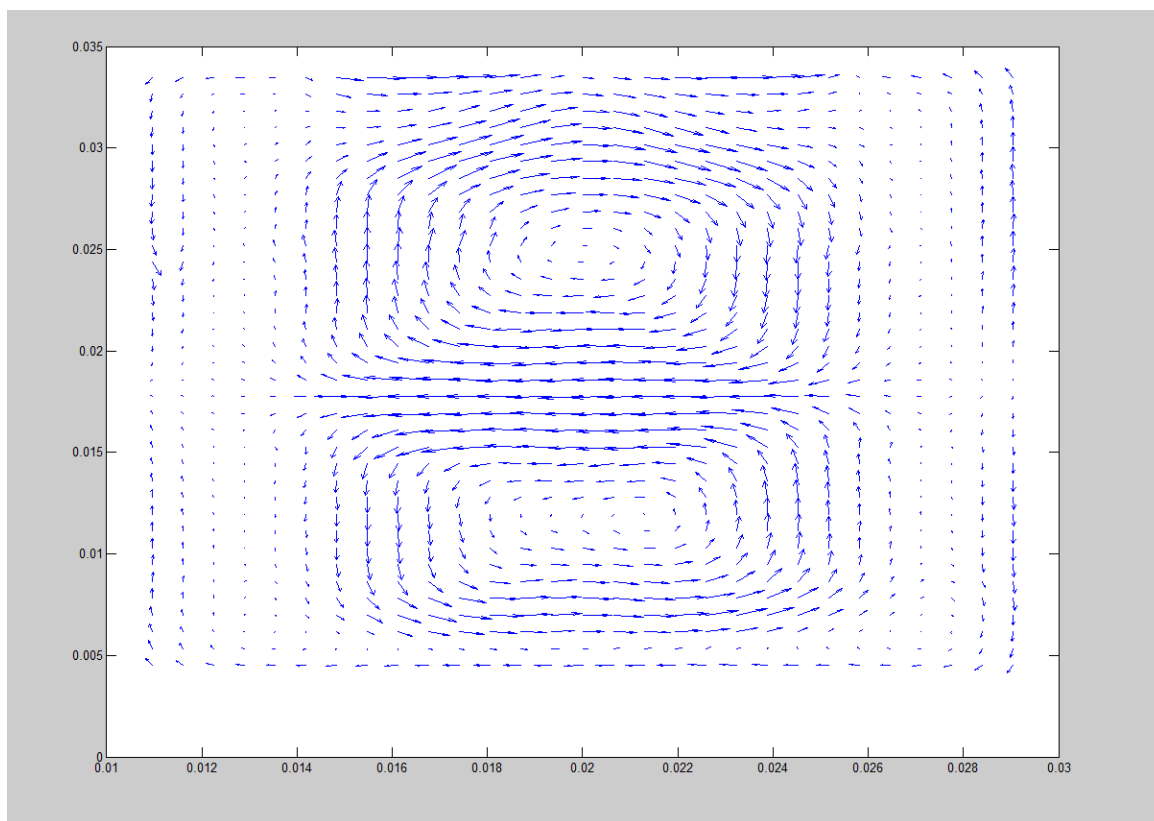
- Les corbes de nivell del corrent de Jv:

Les corbes de nivell de Jv, situades en el pla XY tenen aquesta forma. La zona de més confluència de màxims és la part del costat comú, on coincideixen ambdós corrents principals.



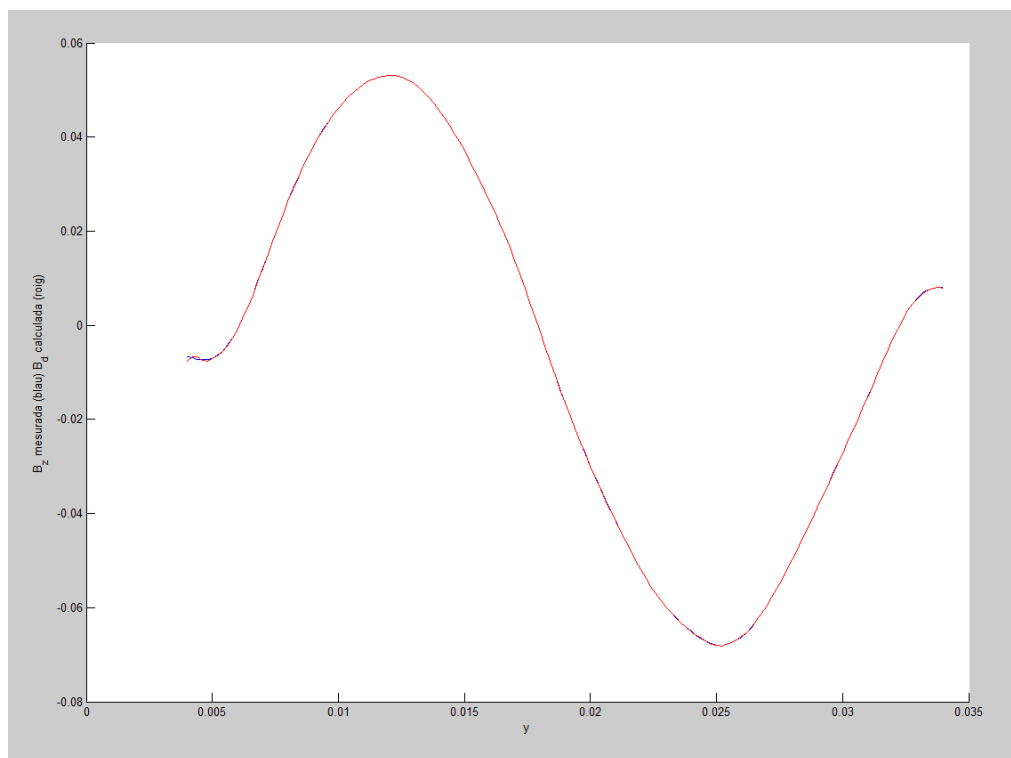
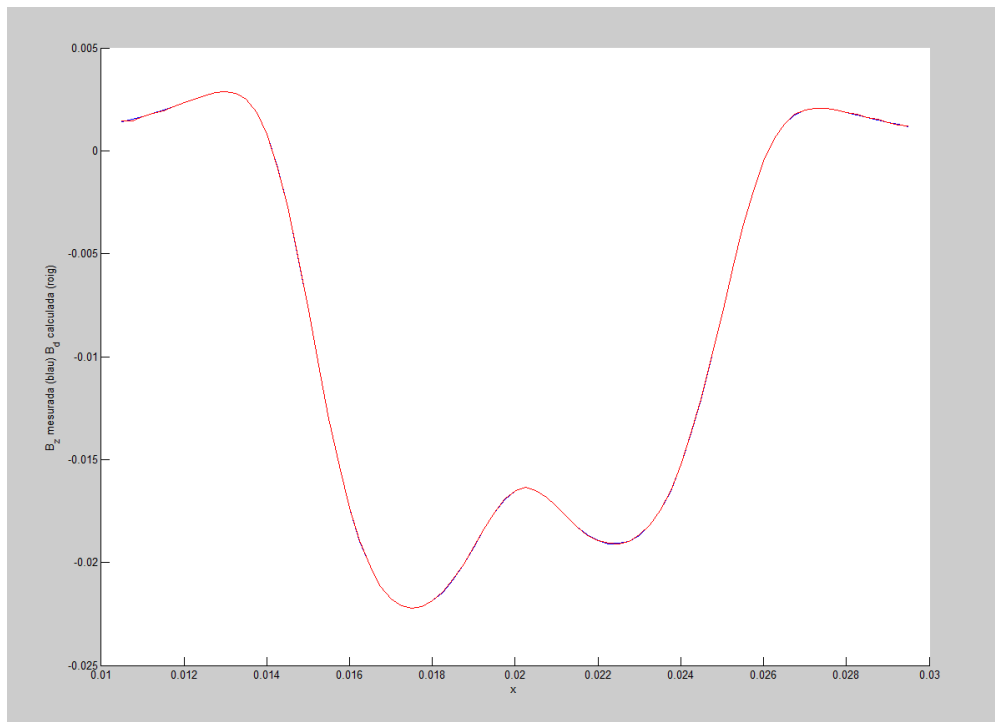
- El camp vectorial dels corrents J_x , J_y

Tal com s'ha comentat anteriorment, són dos rectangles coincidents en un costat, on s'acumulen dos corrents que giren en sentits contraris

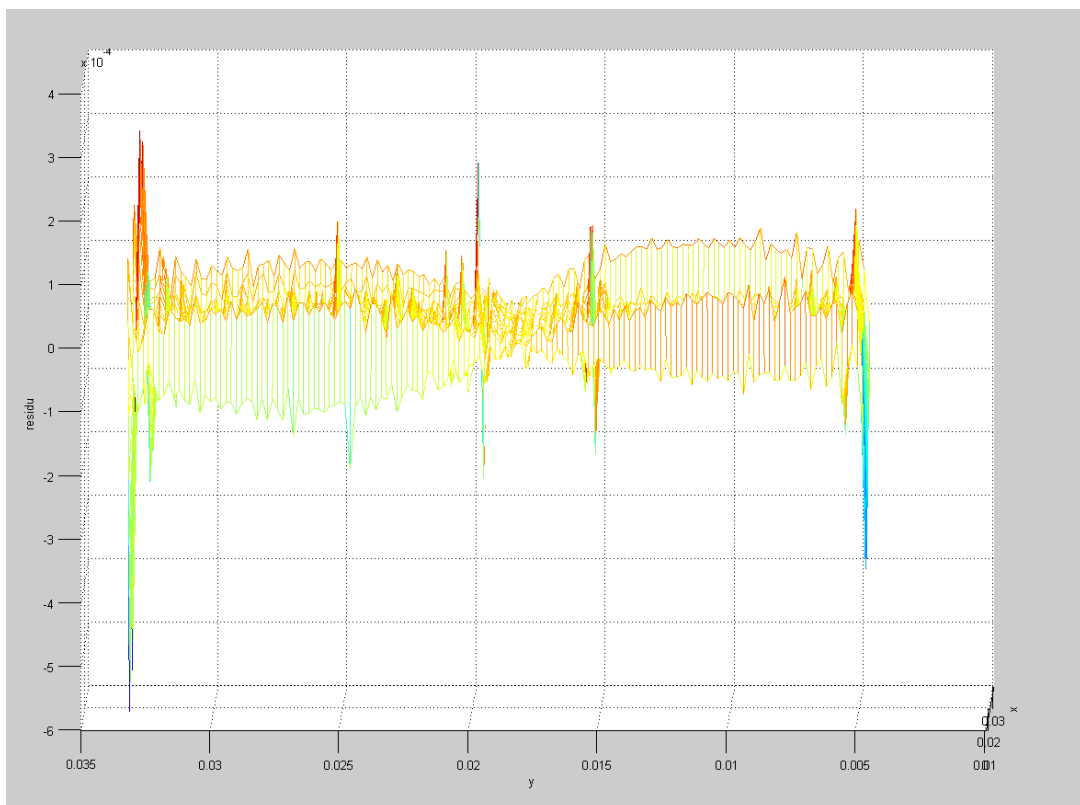
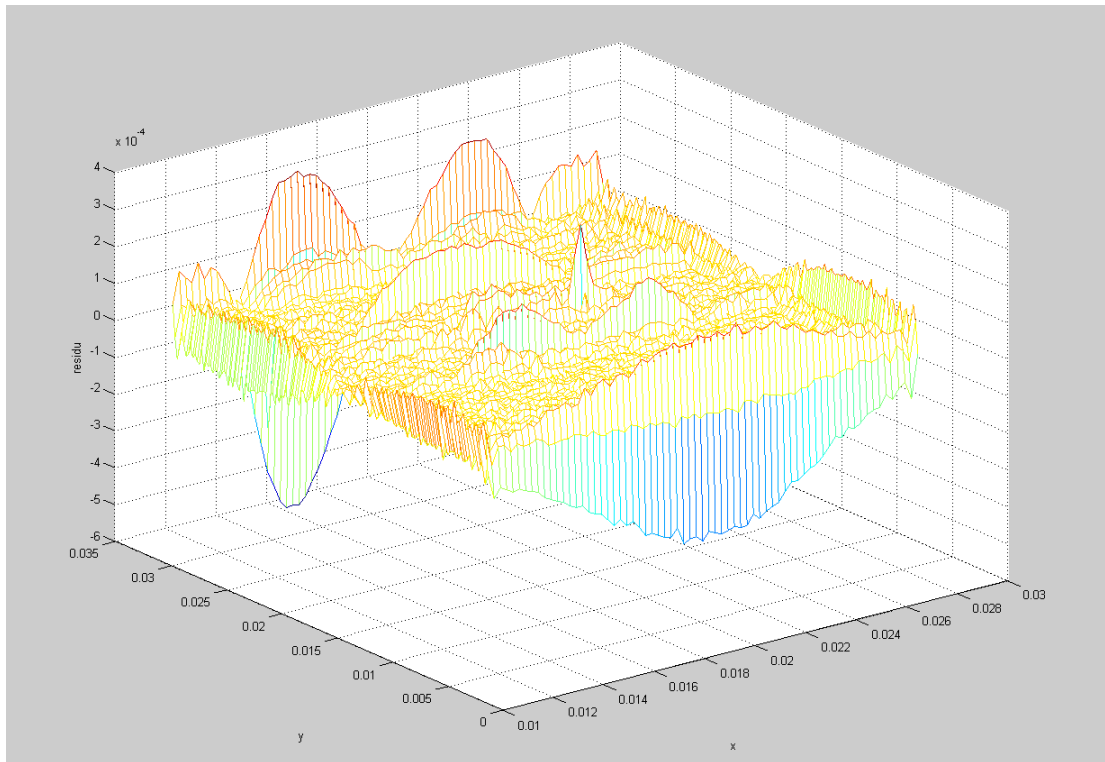


- Els talls transversals per a la visualització del residu:

En el primer tall, es pot veure l'evolució per una fila del camp magnètic B_z mesurat (en blau), respecte el camp magnètic B_d recalculat (en vermell). En el segon tall, es descriuen els mateixos camps, però per una columna de les mesures. Queden superposats en la seva totalitat, de manera que es pot considerar el càlcul com a fidel a la realitat.



El residu $r = Bd - Bz$ és pràcticament nul en tota l'extensió de la mostra. Hi ha excepcions en els costats fruit de les limitacions de càlcul del MATLAB així com algun residu a la part central de l'ordre de 10^{-4} .



5.3. Mostra 3 – Stack nou

- Retall de la finestra del camp magnètic vertical

| Columna inicial 'col0' | Columna final 'colf' | Pas entre columnes 'pasencolumna' | Fila inicial 'fila0' | Fila final 'filaf' | Pas entre files 'pasenfila' |
|---------------------------|-------------------------|--------------------------------------|-------------------------|-----------------------|--------------------------------|
| 1800 | 6000 | 50 | 20 | 170 | 1 |

- Dimensió dels camps magnètic, elèctric i d'imantació

| Camp Bz | Camp Jv | Camp M (mi x ni) |
|----------|---------|------------------|
| 151 x 85 | 57 x 71 | 58 x 72 |

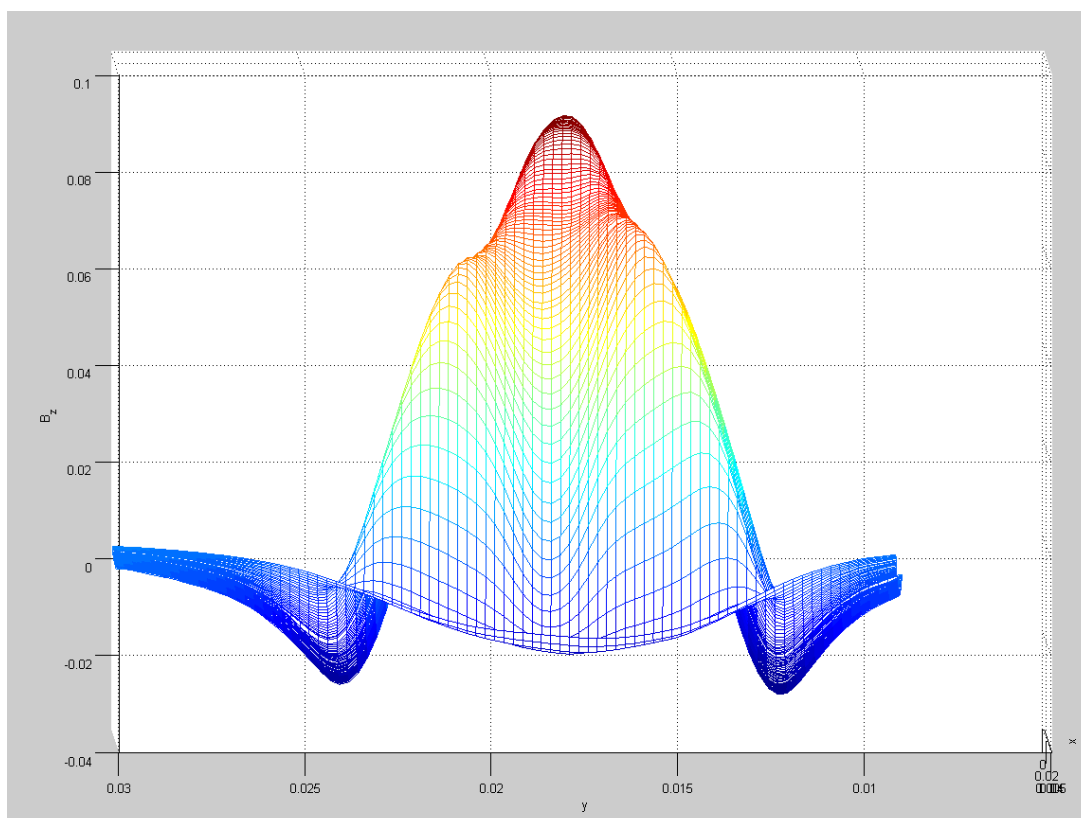
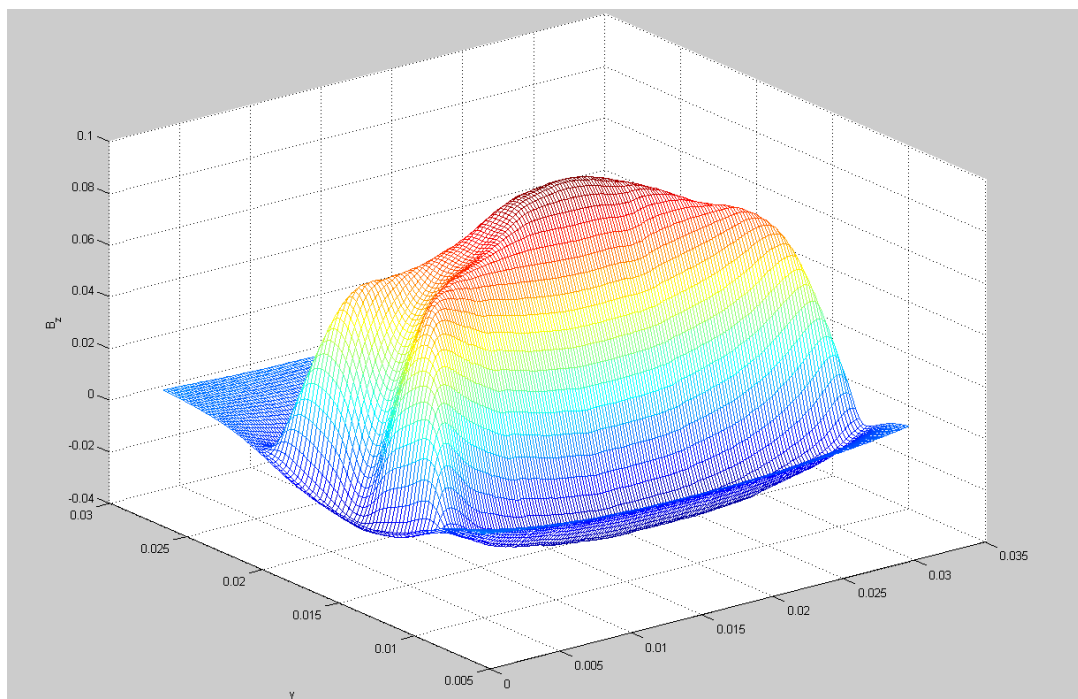
- Característiques del càlcul

| Nombre de mesures | Nombre d'elements | Sobredeterminació | Nombre de condició | Memòria necessària (MB) |
|-------------------|-------------------|-------------------|--------------------|-------------------------|
| 12600 | 4176 | 3,0172 | 6,4864 | 420,940 |

- Figures il·lustratives

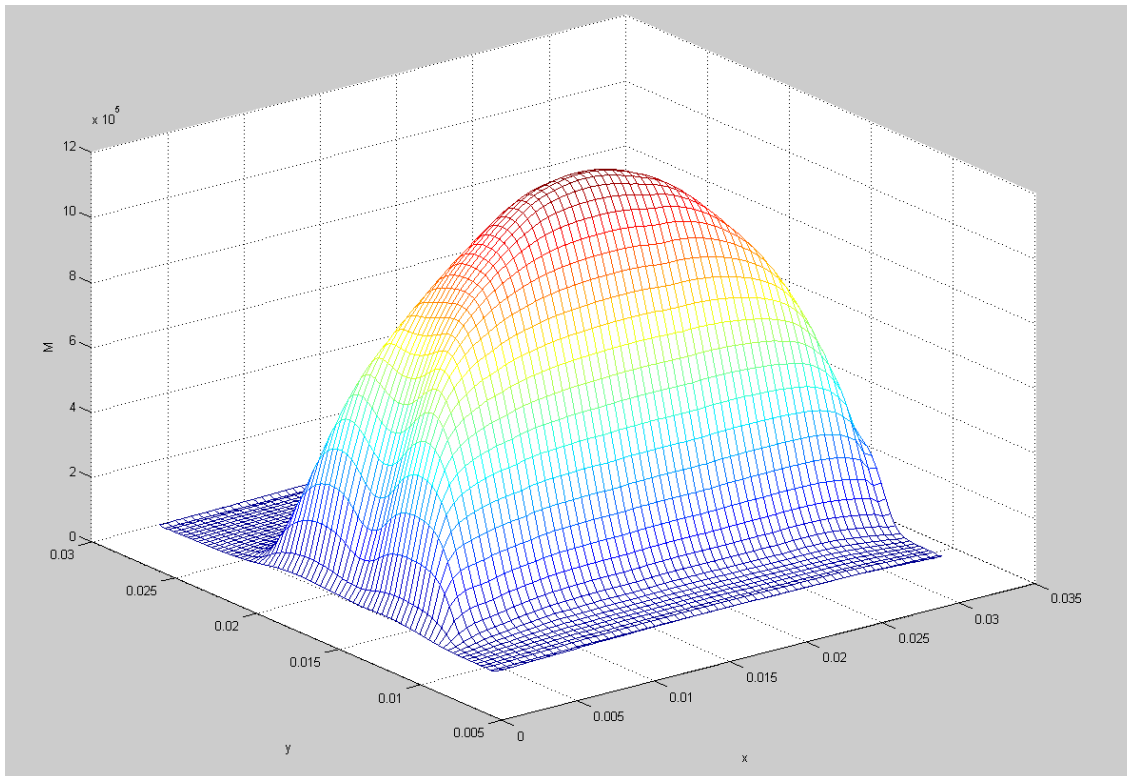
▪ Camp magnètic vertical B_z

La forma del camp magnètic difereix ostensiblement respecte les altres dues mostres. En aquest cas, es tracta d'un perfil dominat per un pol magnètic en la totalitat de la peça, arribant a un màxim de 0,1 T.



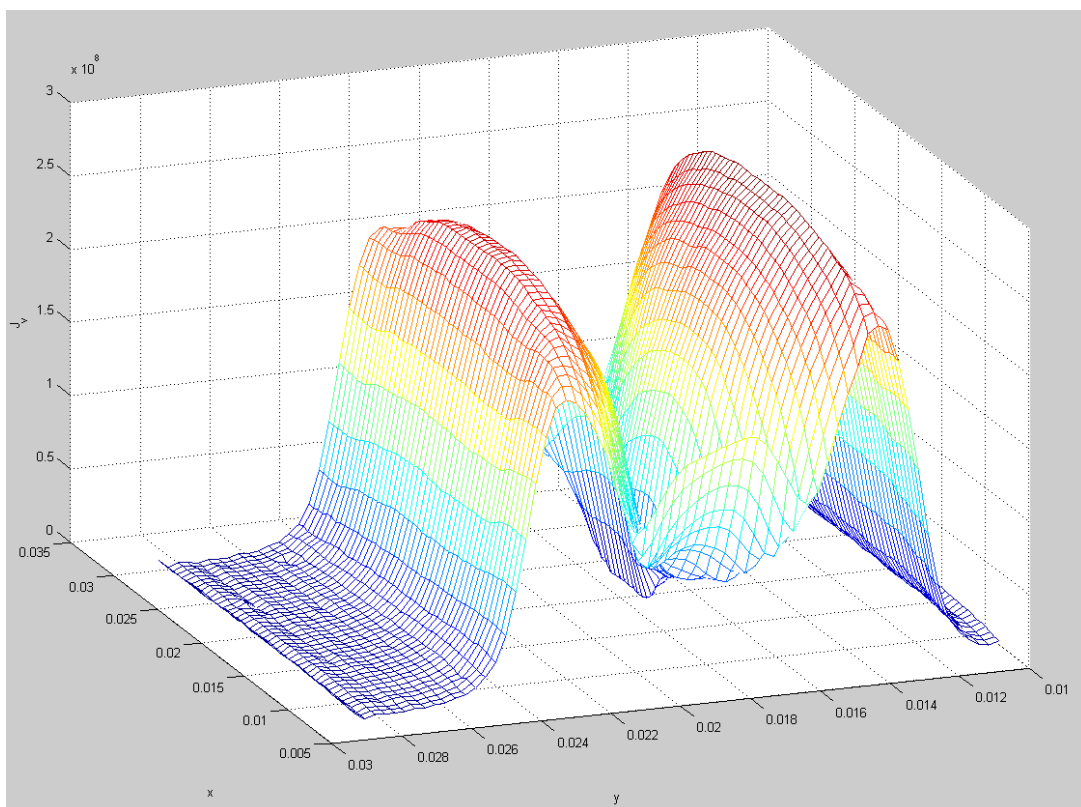
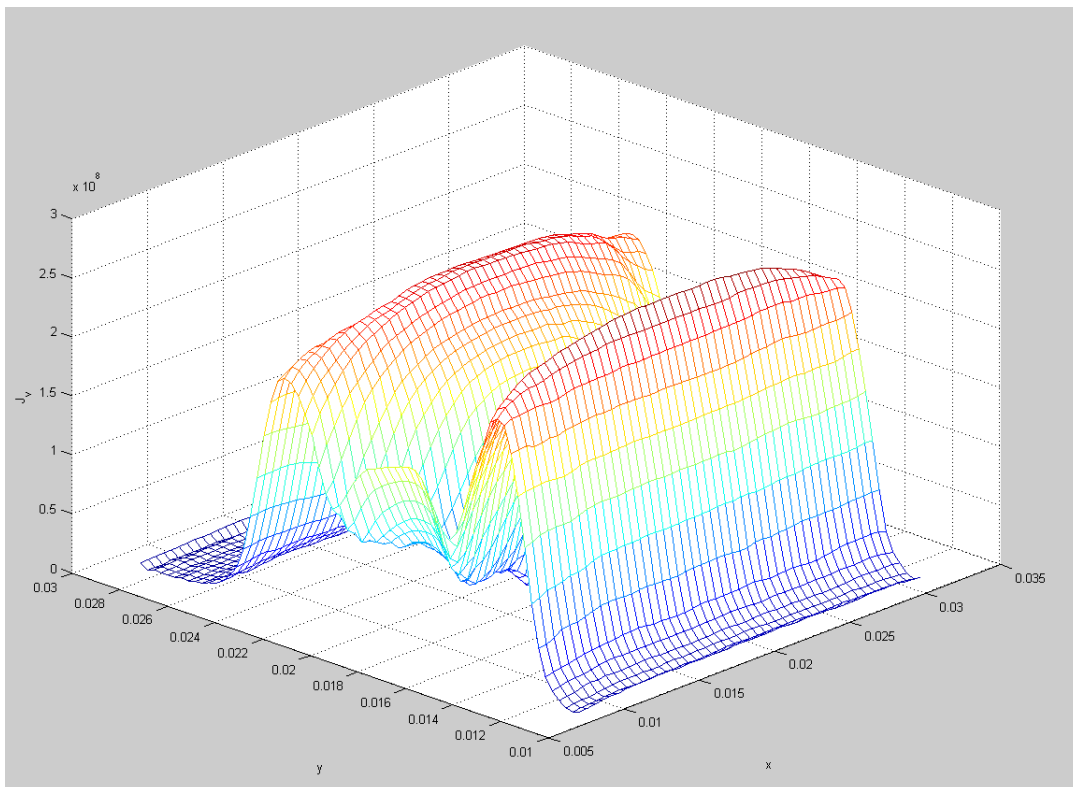
- El camp d'imantació M :

El perfil s'assembla, a causa de la proporcionalitat, al del camp magnètic vertical.



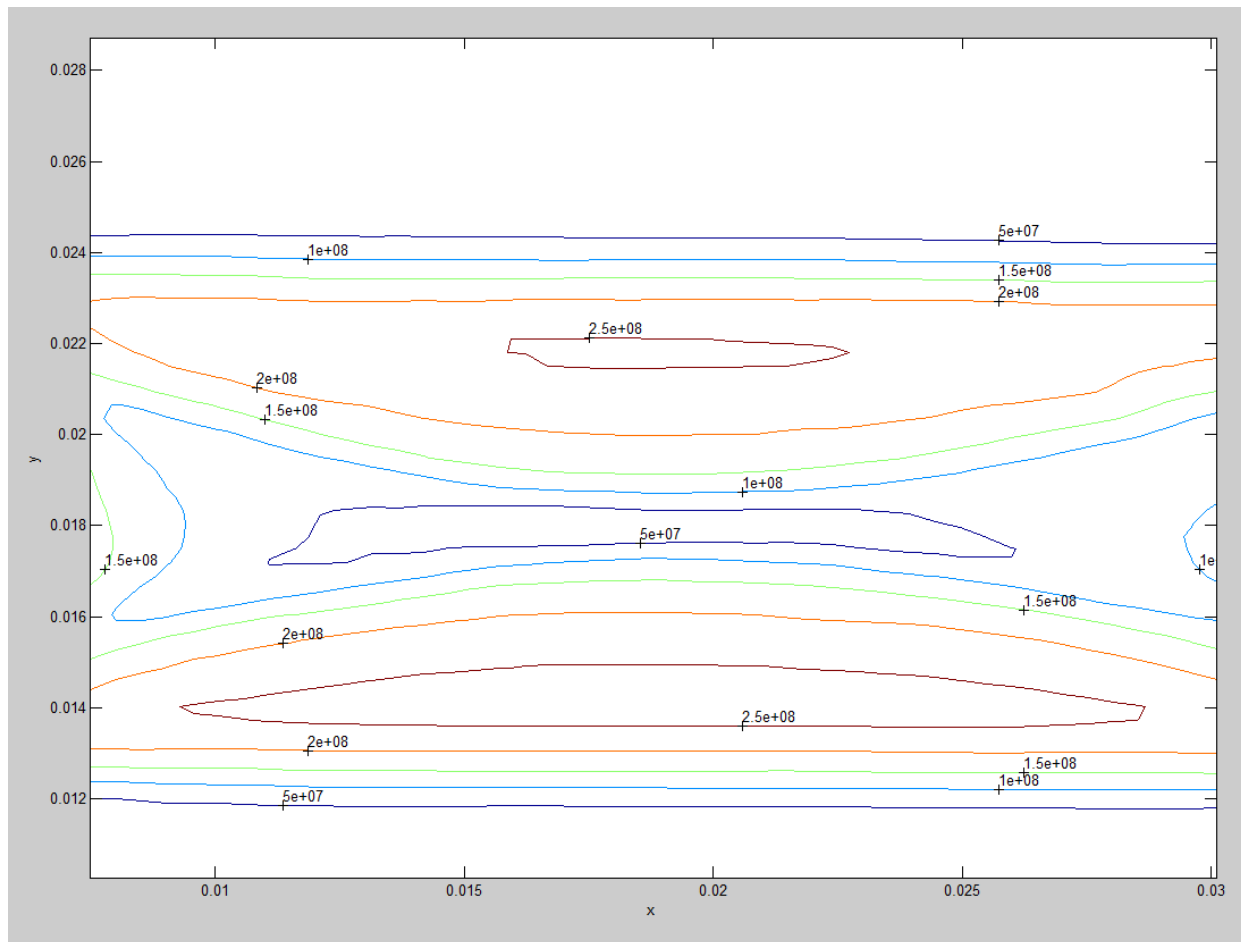
- La densitat del camp de corrent elèctric vertical J_v :

La forma del corrent elèctric vertical es correspon a dues superfícies de màxims, dues ondulacions als laterals de la mostra



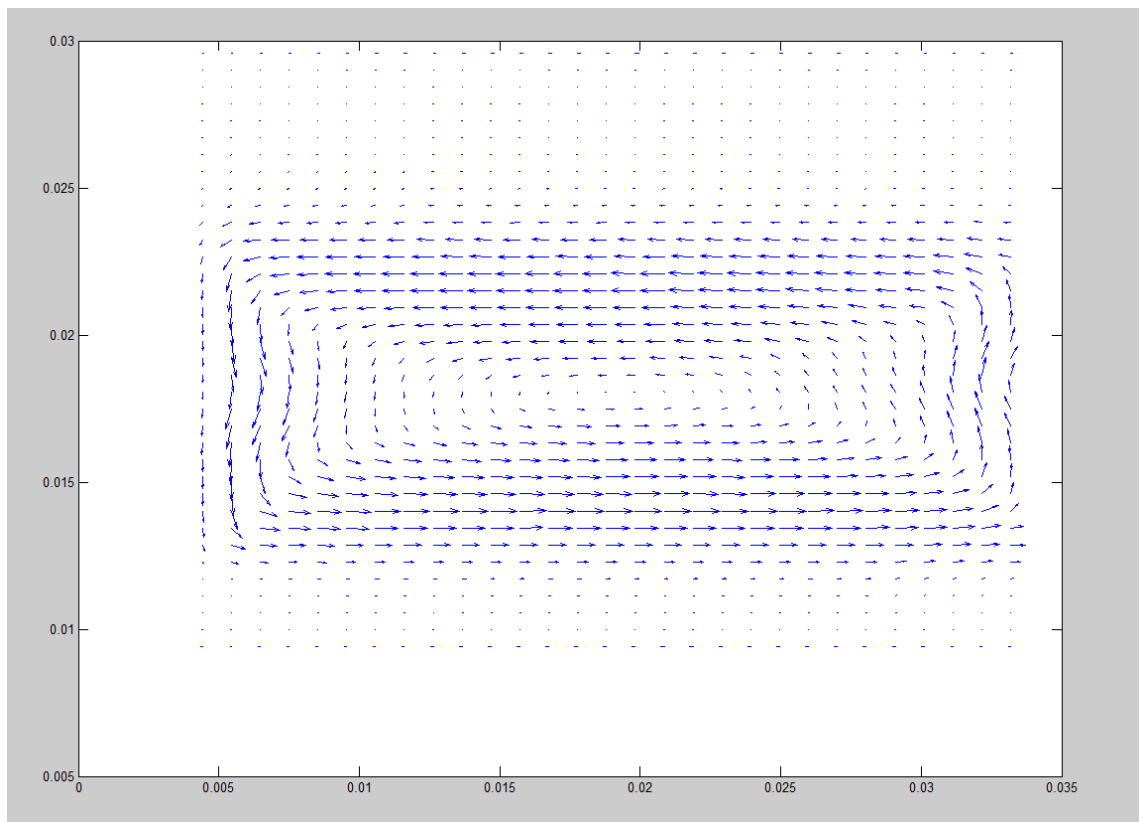
- Les corbes de nivell del corrent de Jv:

Es comprova la tendència mostrada en la figura anterior. Els valors oscil·len des dels $5 \cdot 10^7$ a $2,5 \cdot 10^8$ A, com en les altres mostres.



- El camp vectorial dels corrents J_x , J_y

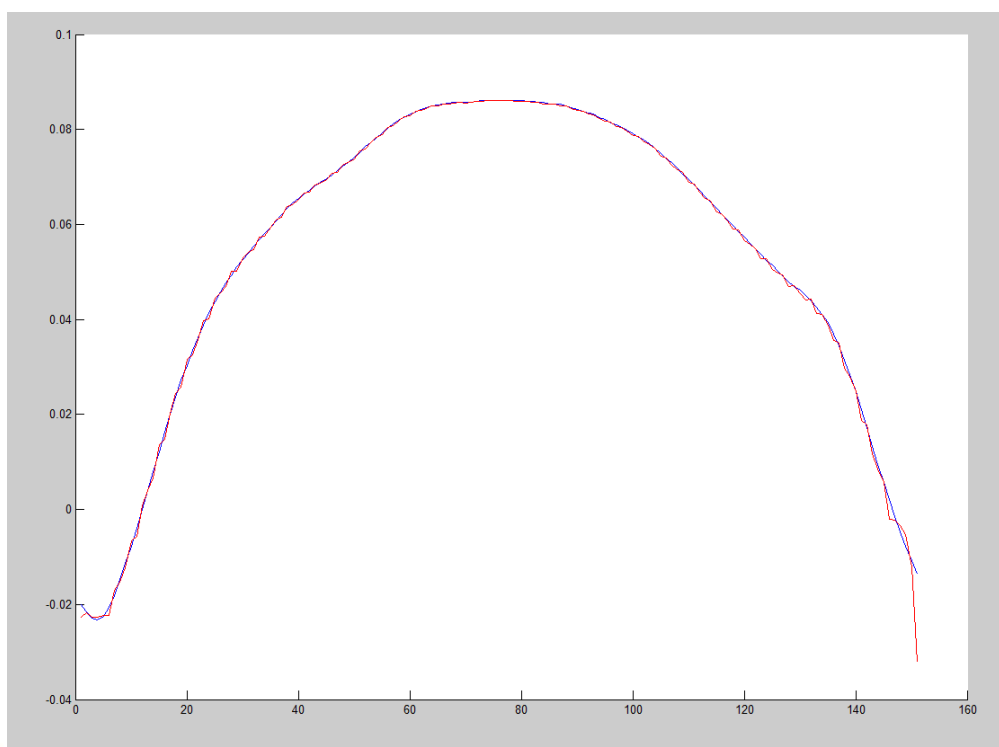
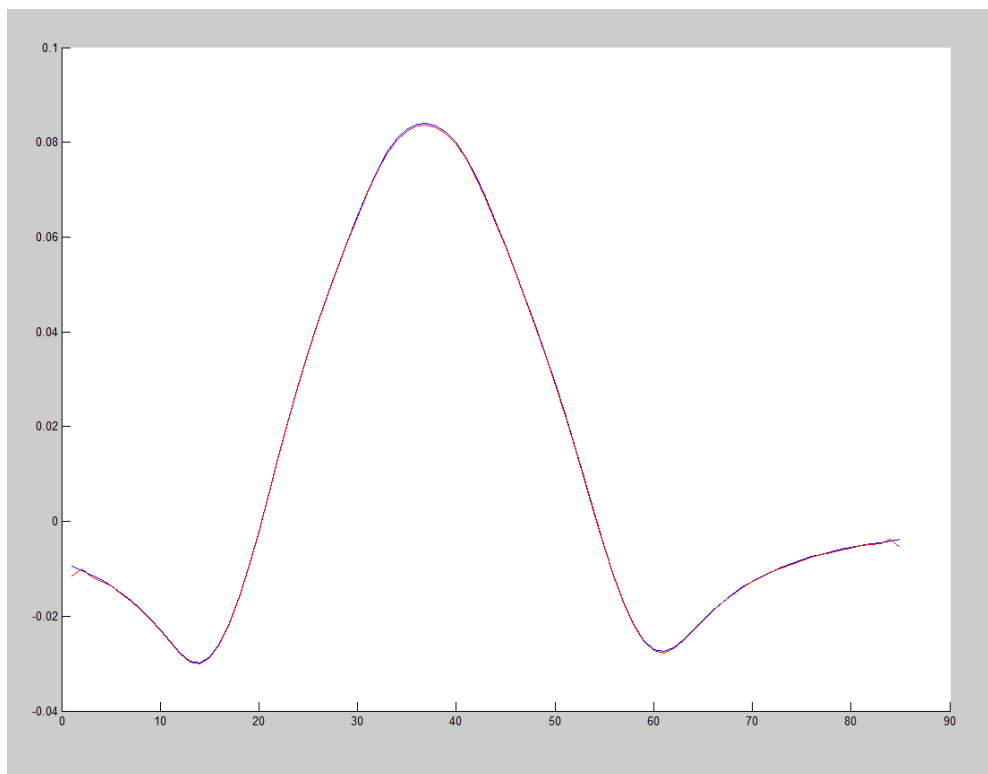
En aquest cas, hi ha un únic rectangle central de gir antihorari.



- Els talls transversals per a la visualització del residu:

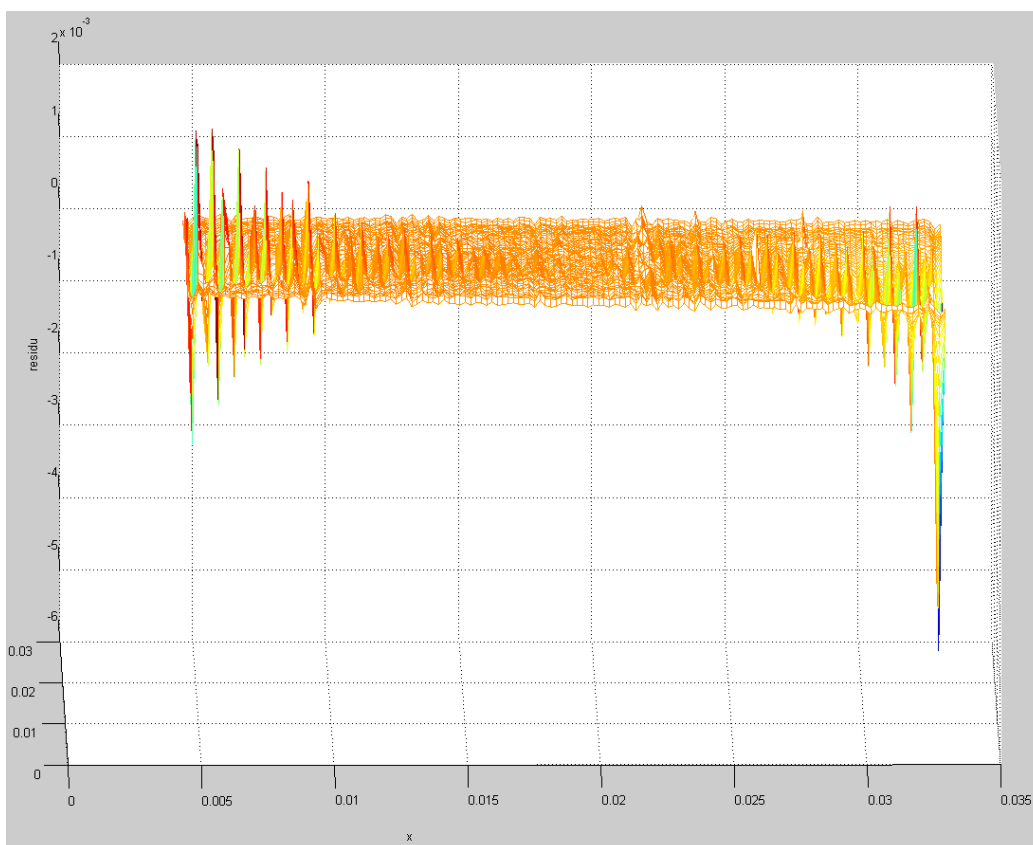
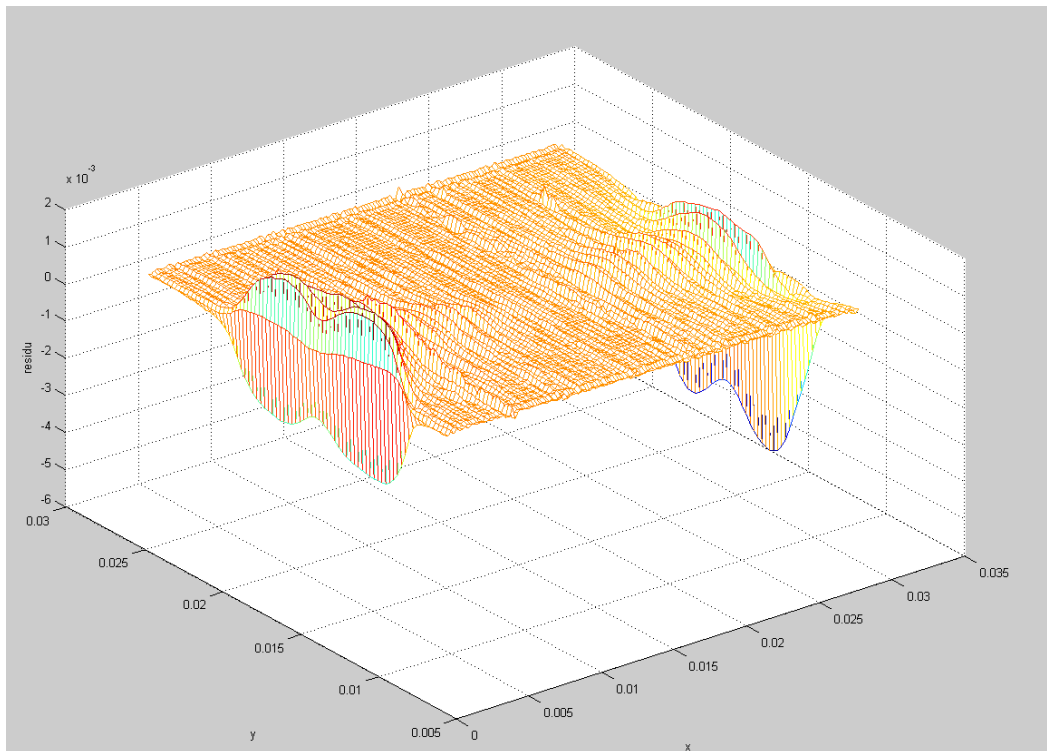
En el primer tall, es pot veure l'evolució per una fila del camp magnètic B_z mesurat (en blau), respecte el camp magnètic B_d recalculat (en vermell). En el segon tall, es descriuen els mateixos camps, però per una columna de les mesures.

Com en les altres mostres, les diferències són nul·les fet que demostra la fiabilitat del programa.



- El mapa del residu en l'extensió de la mesura:

Al llarg de la superfície de la mostra, el residu és pràcticament 0. Només és en els laterals, on el camp magnètic tendeix a ser nul que apareix un residu més gran, de l'ordre de mil·lèsimes.



6. Pla de treball del projecte

6.1. Fases del projecte

L'elaboració del projecte ha constatat de diverses tasques, correspostes amb l'estructura final de la memòria. El treball ha avançat a mesura que se superaven les fites que s'anaven marcant.

➤ 1a fase : Estudi teòric de la llei de Biot-Savart

En aquesta primera tasca s'ha aprofundit en el coneixement de la llei de Biot-Savart i els càlculs que implica. També s'ha entès el problema de Biot-Savart invers, els condicionants existents per poder fer-ne càlculs, els teoremes del Valor Mig i de les Diferències Centrades i s'ha fet la lectura de diversos estudis fets fins a l'actualitat.

➤ 2a fase : Desenvolupament de la integració de Biot-Savart

Per aconseguir l'objectiu final de millorar el programa de càlcul del problema de Biot-Savart invers, calia investigar el camí de la resolució de la integral, el que és la matriu G , que relaciona el camp magnètic vertical amb la imantació.

D'aquesta manera, creant un programa que calculés el resultat de les primitives per cadascun dels punts de mesura i el domini de la peça, s'ajuda a reduir el temps de resolució i a augmentar la capacitat i fiabilitat del programa.

Va ser una fase que s'esperava llarga respecte les altres a causa de la complexitat de la integral en qüestió. Realment, es va trobar ràpidament el camí idoni usant un parell de primitives directes i canvis de variables.

➤ 3a fase : Implementació de la funció CàlculG

Una vegada trobada la primitiva de la integral, es va crear una funció al Matlab, que rebent les dades de mesures i dimensions permetia calcular de manera vectorial la matriu G .

Fetes les comprovacions oportunes d'error i rapidesa de solució, es va instaurar al programa base.

➤ 4a fase : Introducció al programa. Proves inicials.

En aquesta fase es va fer un reconeixement de les diverses parts que conformaven el programa base i a partir d'un fitxer de mesures es van fer es primeres proves de cara a familiaritzar-s'hi. Es va anar jugant amb la reducció inicial de la finestra i la memòria necessària, conceptes introduïts llavors al programa.

➤ 5a fase : Estudi del nombre de condició i el residu d'un sistema lineal

El programa base necessitava de comprovacions de fiabilitat dels càlculs. És per aquest motiu que es va estudiar el nombre de condició i el residu d'un sistema lineal, conceptes de geometria. Ha estat la fase de més durada.

➤ 6a fase : Millora del programa

En aquesta fase, s'han instaurat les figures del residu, el nombre de condició i la sobredeterminació al programa.

➤ 7a fase : Estudis finals

A partir dels tres fitxers de mesures facilitats pel CSIC, s'han fet els estudis amb la finalitat de trobar per cadascuna de les mostres els retalls de finestra que no impossibilitessin el càlcul per culpa de la memòria necessària, la sobredeterminació escaient, un nombre de condició baix i els residus de tendència zero.

➤ 8a fase : Recerca d'informació de superconductors i sondes Hall.

En aquesta fase s'ha recollit informació del material superconductor YBaCuO, tant en usos, potencial com els estudis previs que se n'han servit; i de la sonda Hall, amb la que es prenen les mesures de camp magnètic.

➤ 9a fase : Confecció de la memòria

Per acabar, s'ha fet la recol·lecció de la teoria, els càlculs i les figures adjunts per a la explicació en la memòria dels avenços fets, així com les conclusions que se'n poden extreure.

6.2. Durada del projecte

El projecte va començar el dia 28 de gener de 2016 i ha acabat el dia de la seva entrega, el 23 de juny de 2016. Són doncs 20 setmanes en que cadascuna de les tasques ha ocupat el seu temps.

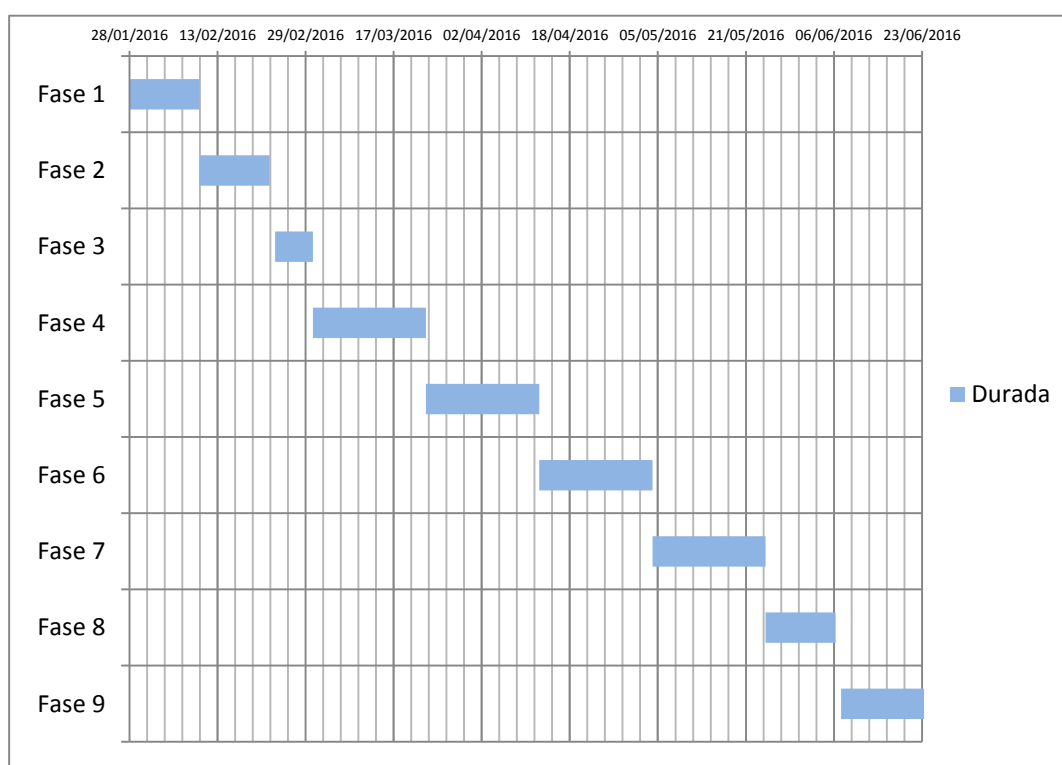
Per hores, el resultat ha estat:

| Tasca | Hores |
|---|--------------|
| Estudi teòric de la llei de Biot-Savart | 5h |
| Desenvolupament de la integració de Biot-Savart | 15h |
| Implementació de la funció CàlculG | 10h |
| Introducció al programa. Proves inicials. | 20h |
| Estudi del nombre de condició i el residu d'un sistema lineal | 15h |
| Millora del programa | 25h |
| Estudis finals | 50h |
| Recerca d'informació de superconductors i sondes Hall. | 20h |
| Confecció de la memòria | 40h |
| Total aproximat | 200 h |

6.3. Diagrama de Gantt

Pel que fa a la distribució de cadascuna de les fases en els 4 mesos de la durada del projecte, així és com ha quedat repartit.

| Activitat | Data d'inici | Durada (dies) | Data de finalització |
|-----------|--------------|---------------|----------------------|
| Fase 1 | 28/01/2016 | 13 | 10/02/2016 |
| Fase 2 | 10/02/2016 | 13 | 24/02/2016 |
| Fase 3 | 24/02/2016 | 7 | 02/03/2016 |
| Fase 4 | 02/03/2016 | 21 | 23/03/2016 |
| Fase 5 | 23/03/2016 | 21 | 13/04/2016 |
| Fase 6 | 13/04/2016 | 21 | 04/05/2016 |
| Fase 7 | 04/05/2016 | 21 | 25/05/2016 |
| Fase 8 | 25/05/2016 | 13 | 08/06/2016 |
| Fase 9 | 08/06/2016 | 16 | 23/06/2016 |



7. Pressupost

El treball que s'ha presentat requereix de pocs recursos econòmics, al ser un estudi analític d'un programa de càlcul. Els costs es poden dividir en tres grups: cost del personal, cost d'equipament informàtic i costs indirectes.

7.1. Cost del personal

El treball l'ha confeccionat un enginyer júnior que de manera aproximada i tenint en compte la situació actual del mercat laboral, guanya uns 15 euros per hora treballada:

| Nom | Categoria | Euros/hora | Hores treballades | Cost total |
|-----------|-----------------|------------|-------------------|------------|
| Abel Purí | Enginyer júnior | 15 | 200 | 3.000 |

7.2. Cost d'equipament informàtic

Els diversos estudis analítics necessiten d'un ordinador amb memòria lliure que suporti el pes de programa, que tingui instal·lat el Matlab i amb el paquet Microsoft Office 2013 per poder redactar el treball i fer-ne una presentació. De manera aproximada, els costs resultants són:

| Producte | Cost |
|--|--------------|
| Ordinador portàtil ASUS Eee PC Seashell series | 279 € |
| Llicència Matlab Student (1 any) | 35 € |
| Paquet Microsoft Office 2013 | 125 € |
| Total | 439 € |

7.3. Costs indirectes

De la realització d'aquest treball en deriva l'ús d'elements indirectes, com són el consum d'energia elèctrica i el material de copisteria per a les diverses impressions fetes durant el treball.

| Producte | Cost unitari | Unitat | Cost |
|------------------------|--------------|---------|--------------|
| Material de copisteria | - | - | 5 € |
| Energia elèctrica | 0,13 €/kWh | 900 kWh | 117 € |
| Total | - | - | 122 € |

7.4. Pressupost total

Tenint en compte els conceptes anteriorment desenvolupats, el pressupost global queda de la següent manera:

| Concepte | Cost |
|-----------------------|----------------|
| Personal | 3.000 € |
| Equipament informàtic | 439 € |
| Indirecte | 122 € |
| Total | 3.561 € |

Així doncs, sumant les aproximacions de costs fetes el cost total és de **3.586 €**, que és molt baix i fàcilment assumible.

8. Impacte mediambiental

El projecte que s'ha dut a terme no suposa cap impacte al medi ambient. És un treball de càlcul informàtic en que la seva temàtica i desenvolupament no suposa cap actuació e l'entorn.

A més a més, els costs d'implementació del programa són nuls i la quantitat de fulls impresos que s'han emprat és molt petita.

9. Conclusions

Els objectius inicials del projecte s'han assolit de manera satisfactòria. S'ha pogut entendre més profundament el fenomen de la inducció magnètica i la llei de Biot-Savart que relaciona el corrent elèctric inductor amb el camp magnètic induït.

En aquest projecte, s'ha estudiat el problema de Biot-Savart invers per a peces superconductores, consistent en el càlcul del corrent elèctric induït a partir de l'aplicació de camp magnètic sobre la superfície de les peces. També s'ha entès el funcionament del programa de Matlab que permet resoldre aquest problema a través de fitxers de mostres reals.

Tot desenvolupant l'equació del problema de Biot-Savart invers, s'ha creat la funció '**CalculG2**' que de manera vectorial permet agilitzar els càlculs del programa i disminuir-ne l'error.

A més a més, al programa s'hi han implementat recursos de comprovació de la seva fiabilitat i rapidesa de càlcul mitjançant elements com el nombre de condició, el residu, la sobredeterminació i la funció '**clock**' de la llibreria bàsica de Matlab.

Finalment, aquestes millores s'han pogut exemplificar a través de tres mostres de mesures de camp magnètic.

10. Bibliografia

10.1.Referències de divulgació sobre superconductors

<http://www.quimica.es/enciclopedia/YBCO.html>

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/solids/scex.html#c4>

<http://www.astromia.com/glsario/superconductor.htm>

10.2.Referències bibliogràfiques de la memòria

[1] J. Amorós, M. Carrera, J.Fontcuberta, X. Obradors.

Càlcul de corrents crítics per mitjà de mesures de camp magnètic

Dept. Matemàtica Aplicada I UPC.

[2] M. Carrera. (tesi doctoral, U. de Barcelona) (2015)

Magnetometria Hall i determinació de corrents crítics en superconductors d'alta temperatura. YBaCuO texturitzat.

[3] M. Carrera, J. Amorós, X. Obradors, J. Fontcuberta.

A new method of computation of current distribution maps in bulk high-temperature superconductors: analysis and validation

Superconductor Science and Technology 16 (2003) 1187--1194.

[4] M. Carrera, J. Amorós, X. Granados, R. Maynou, T. Puig, X. Obradors.

Computation of Current Distribution in YBCO Tapes with Defects Obtained from Hall Magnetic Mapping by Inverse Problem Solution

IEEE Transactions on Applied Superconductivity 21 (2011) 3408-341

11. Annex

Les diferents funcions Matlab que s'han anat desenvolupant són:

- **Prova primitiva**

En aquesta funció es calculava la integral definida a partir de les comandes pròpies de Matlab. Aquesta integral és la versió simplificada de la que s'ha acabat resolent.

```
%Calcul de les primitives
syms x y z Xb Yb Zb Xo Xf Yo Yf gruiX Uo
F1 = -(Yb-Yf) / ((Xb-x)^2+(Yb-Yf)^2+(Zb-z)^2)^(3/2) + (Yb-Yo) / ((Xb-x)^2+(Yb-Yo)^2+(Zb-z)^2)^(3/2)
F2 = -(Xb-Xf) / ((Xb-Xf)^2+(Yb-y)^2+(Zb-z)^2)^(3/2) + (Xb-Xo) / ((Xb-Xo)^2+(Yb-y)^2+(Zb-z)^2)^(3/2)

%Resolució primera integral doble. Primer integrem respecte x i ho definim.
f1=dsolve(['Df1=' char(F1)], 'x')
f1definida=subs(f1, 'x', Xf)-subs(f1, 'x', Xo)

%Integrem respecte z i ho definim
f11=dsolve(['Df11=' char(f1definida)], 'z')
f11definida=subs(f11, 'z', 0)-subs(f11, 'z', -gruiX)

%Resolució segona integral doble. Primer integrem respecte y i ho definim.
f2=dsolve(['Df2=' char(F2)], 'y')
f2definida=subs(f2, 'y', Yf)-subs(f2, 'y', Yo)

%Integrem respecte z i ho definim
f22=dsolve(['Df22=' char(f2definida)], 'z')
f22definida=subs(f22, 'z', 0)-subs(f22, 'z', -gruiX)

%Operació final
G = Uo*(f11definida+f22definida)/(4*pi)
```

- **Càlcul G un a un**

En aquesta funció ja s'expressava la primitiva resolta de la integral definida del projecte en qüestió. Permetia calcular el paràmetre G a partir dels valors de les variables de la integral, que eren els punts inicial i final per cada eix de referencia i el punt de mesura del camp magnètic.

```
function [ G ] = calculGunaun(Xo,Xf,Yo,Yf,Zo,Zf,Xb,Yb,Zb )
%Aquesta funcio permet calcular G per cadascun dels valors de les variables
% Es tracta d'una suma de arcs tangents
F11=atan((Zb-Zf)*(Xb-Xf))/((Yb-Yf)*sqrt((Zb-Zf)^2+(Xb-Xf)^2+(Yb-Yf)^2))
F12=atan((Zb-Zf)*(Xb-Xo))/((Yb-Yf)*sqrt((Zb-Zf)^2+(Xb-Xo)^2+(Yb-Yf)^2))
F13=atan((Zb-Zo)*(Xb-Xf))/((Yb-Yf)*sqrt((Zb-Zo)^2+(Xb-Xf)^2+(Yb-Yf)^2))
F14=atan((Zb-Zo)*(Xb-Xo))/((Yb-Yf)*sqrt((Zb-Zo)^2+(Xb-Xo)^2+(Yb-Yf)^2))

F1=F11-F12-F13+F14

F21=atan((Zb-Zf)*(Xb-Xf))/((Yb-Yo)*sqrt((Zb-Zf)^2+(Xb-Xf)^2+(Yb-Yo)^2))
F22=atan((Zb-Zf)*(Xb-Xo))/((Yb-Yo)*sqrt((Zb-Zf)^2+(Xb-Xo)^2+(Yb-Yo)^2))
F23=atan((Zb-Zo)*(Xb-Xf))/((Yb-Yo)*sqrt((Zb-Zo)^2+(Xb-Xf)^2+(Yb-Yo)^2))
F24=atan((Zb-Zo)*(Xb-Xo))/((Yb-Yo)*sqrt((Zb-Zo)^2+(Xb-Xo)^2+(Yb-Yo)^2))

F2=F21-F22-F23+F24

F31=atan((Zb-Zf)*(Yb-Yf))/((Xb-Xf)*sqrt((Zb-Zf)^2+(Xb-Xf)^2+(Yb-Yf)^2))
F32=atan((Zb-Zf)*(Yb-Yo))/((Xb-Xf)*sqrt((Zb-Zf)^2+(Xb-Xf)^2+(Yb-Yo)^2))
F33=atan((Zb-Zo)*(Yb-Yf))/((Xb-Xf)*sqrt((Zb-Zo)^2+(Xb-Xf)^2+(Yb-Yf)^2))
F34=atan((Zb-Zo)*(Yb-Yo))/((Xb-Xf)*sqrt((Zb-Zo)^2+(Xb-Xf)^2+(Yb-Yo)^2))

F3=F31-F32-F33+F34

F41=atan((Zb-Zf)*(Yb-Yf))/((Xb-Xo)*sqrt((Zb-Zf)^2+(Xb-Xo)^2+(Yb-Yf)^2))
F42=atan((Zb-Zf)*(Yb-Yo))/((Xb-Xo)*sqrt((Zb-Zf)^2+(Xb-Xo)^2+(Yb-Yo)^2))
F43=atan((Zb-Zo)*(Yb-Yf))/((Xb-Xo)*sqrt((Zb-Zo)^2+(Xb-Xo)^2+(Yb-Yf)^2))
F44=atan((Zb-Zo)*(Yb-Yo))/((Xb-Xo)*sqrt((Zb-Zo)^2+(Xb-Xo)^2+(Yb-Yo)^2))

F4=F41-F42-F43+F44

G=-F1+F2-F3+F4; %INTRODUIR FACTOR MULTIPLICANT?
G=1e-7*G;
end
```

• Càlcul G

Comprovada l'anterior funció, el següent pas va ser introduir-ho en una iteració doble que a través del càlcul de cadascun dels seus components, permetés configurar la matriu G de manera vectorial. La versió final n'és **CàlculG2**, que simplifica les iteracions.

```
function [ G ] = calculG1(Xo,Xf,Yo,Yf,Zo,Zf,Xb,Yb,Zb )
%Calcul matriu G
Nel=length(Xo);
G=[];
Nef=length(Xb);
for l=1:Nef,
    G1=[];
    for k=1:Nel,

        %Es tracta d'una suma de arcs tangents
        F11=atan((Zb(l)-Zf(k)).*(Xb(l)-Xf(k))./(Yb(l)-Yf(k)).*sqrt((Zb(l)-Zf(k)).^2+(Xb(l)-Xf(k)).^2+(Yb(l)-Yf(k)).^2)));
        F12=atan((Zb(l)-Zf(k)).*(Xb(l)-Xo(k))./(Yb(l)-Yf(k)).*sqrt((Zb(l)-Zf(k)).^2+(Xb(l)-Xo(k)).^2+(Yb(l)-Yf(k)).^2)));
        F13=atan((Zb(l)-Zo(k)).*(Xb(l)-Xf(k))./(Yb(l)-Yf(k)).*sqrt((Zb(l)-Zo(k)).^2+(Xb(l)-Xf(k)).^2+(Yb(l)-Yf(k)).^2)));
        F14=atan((Zb(l)-Zo(k)).*(Xb(l)-Xo(k))./(Yb(l)-Yf(k)).*sqrt((Zb(l)-Zo(k)).^2+(Xb(l)-Xo(k)).^2+(Yb(l)-Yf(k)).^2)));

        F1=F11-F12-F13+F14;

        F21=atan((Zb(l)-Zf(k)).*(Xb(l)-Xf(k))./(Yb(l)-Yo(k)).*sqrt((Zb(l)-Zf(k)).^2+(Xb(l)-Xf(k)).^2+(Yb(l)-Yo(k)).^2)));
        F22=atan((Zb(l)-Zf(k)).*(Xb(l)-Xo(k))./(Yb(l)-Yo(k)).*sqrt((Zb(l)-Zf(k)).^2+(Xb(l)-Xo(k)).^2+(Yb(l)-Yo(k)).^2)));
        F23=atan((Zb(l)-Zo(k)).*(Xb(l)-Xf(k))./(Yb(l)-Yo(k)).*sqrt((Zb(l)-Zo(k)).^2+(Xb(l)-Xf(k)).^2+(Yb(l)-Yo(k)).^2)));
        F24=atan((Zb(l)-Zo(k)).*(Xb(l)-Xo(k))./(Yb(l)-Yo(k)).*sqrt((Zb(l)-Zo(k)).^2+(Xb(l)-Xo(k)).^2+(Yb(l)-Yo(k)).^2)));

        F2=F21-F22-F23+F24;

        F31=atan((Zb(l)-Zf(k)).*(Yb(l)-Yf(k))./(Xb(l)-Xf(k)).*sqrt((Zb(l)-Zf(k)).^2+(Xb(l)-Xf(k)).^2+(Yb(l)-Yf(k)).^2)));
        F32=atan((Zb(l)-Zf(k)).*(Yb(l)-Yo(k))./(Xb(l)-Xf(k)).*sqrt((Zb(l)-Zf(k)).^2+(Xb(l)-Xf(k)).^2+(Yb(l)-Yo(k)).^2)));
        F33=atan((Zb(l)-Zo(k)).*(Yb(l)-Yf(k))./(Xb(l)-Xf(k)).*sqrt((Zb(l)-Zo(k)).^2+(Xb(l)-Xf(k)).^2+(Yb(l)-Yf(k)).^2)));
        F34=atan((Zb(l)-Zo(k)).*(Yb(l)-Yo(k))./(Xb(l)-Xf(k)).*sqrt((Zb(l)-Zo(k)).^2+(Xb(l)-Xf(k)).^2+(Yb(l)-Yo(k)).^2)));

        F3=F31-F32-F33+F34;

        F41=atan((Zb(l)-Zf(k)).*(Yb(l)-Yf(k))./(Xb(l)-Xo(k)).*sqrt((Zb(l)-Zf(k)).^2+(Xb(l)-Xo(k)).^2+(Yb(l)-Yf(k)).^2)));
        F42=atan((Zb(l)-Zf(k)).*(Yb(l)-Yo(k))./(Xb(l)-Xo(k)).*sqrt((Zb(l)-Zf(k)).^2+(Xb(l)-Xo(k)).^2+(Yb(l)-Yo(k)).^2)));
        F43=atan((Zb(l)-Zo(k)).*(Yb(l)-Yf(k))./(Xb(l)-Xo(k)).*sqrt((Zb(l)-Zo(k)).^2+(Xb(l)-Xo(k)).^2+(Yb(l)-Yf(k)).^2)));
        F44=atan((Zb(l)-Zo(k)).*(Yb(l)-Yo(k))./(Xb(l)-Xo(k)).*sqrt((Zb(l)-Zo(k)).^2+(Xb(l)-Xo(k)).^2+(Yb(l)-Yo(k)).^2)));

        F4=F41-F42-F43+F44;
        G1=[G1,-F1+F2-F3+F4];
    end
    G=[G;G1];
end
G=1e-7*G
```